量子論のための
表現論

林　正人 著



共立出版

まえがき

群論的対称性は量子力学における最も基本的な概念であり，物理学の様々な分野で活用されてきた．量子系の特徴を積極的に用いて情報処理を行う量子情報においても，群論的対称性が重要な位置を占める．特に量子論では，様々な群の表現が量子系に現れるため，群の表現論が重要な役割を果たす．いくつかの量子論のテーマではその根幹の部分で表現論的な考え方が基礎となっているにも関わらず十分に意識されていないことが多い．このようなテーマでは，表現論的構造を意識することで，より深くその問題が理解できるだけでなく，一般化が容易に可能となることが多い．しかしながら，量子論の数理的基礎付けにおいては，これまで作用素代数的な手法や偏微分方程式の手法が重視され，表現論的手法は十分に重視されてきたとは言いがたい．そのため，量子論に現れる様々な表現論的な手法をまとめた書籍は英文のものを含めて決して多くない．一方，数学の内部では表現論に関する蓄積は目を見張るものがあるものの，既存の表現論の書籍は以下にあげる問題があるため，量子情報を含む量子論の研究者にとってアクセスしやすい形になっていないのが現状である．

量子論に有益な表現論の知識は表現論の様々なテーマに分かれているため，それらが細分化され，1つの本にまとまっていない．表現論を数学分野として研究する立場からは，どうしても個別の表現論のテーマについて特化された記載となってしまう．表現論はどうしても煩雑な記号を用いることになるが，異なる書籍に跨って記載されている内容を扱う場合，これらの書籍の間での記号

の読み替えだけでも大変な手間となってしまう．特に，量子論で重要となるのは実 Lie 群の表現であるが，実 Lie 群の表現の分類には対応する実 Lie 環の表現を経由することになる．しかし，多くの数学書では複素 Lie 環の表現に重点が置かれており，実 Lie 環に重点を置いたものは少ない．複素 Lie 環の表現に対して適切な読み替えを行うことで，実 Lie 環の表現は得られるが，これについて丁寧に記載されている書籍は少ない．特に，実 Lie 環の表現への対処は煩雑さが増えるので，避けられる傾向にある．既存の数学書では，このように個別のテーマについての丁寧な解説はあるものの，量子論への応用のためにはそれらをつなぐ必要があり，その接続部分について丁寧に書かれている書籍は少ない．物理学者向きの書籍はそれなりにそのような点に配慮はあるものの細部の省略が多く，説明が十分でないこともある．さらに，量子論では通常の表現に加え，射影的表現が重要な役割を果たすが，射影的表現については，多くの数学書では十分に扱っていない．特に，射影的表現の場合の一般化はある意味で自明な場合が多いが，意外と微妙な点を含んでおり，この点が，量子論の観点からも重要なポイントとなることがある．この他，いくつかの表現論のテーマは，多くの数学書では，過度に一般化された形で記載されており，量子論への応用で必要な場合での具体的な記載が少ない．用いられている記号が量子論へ応用しやすいものになっていない．このように，量子論の研究者が表現論に対してアクセスする妨げとなっている要因はたくさんある．

本書の内容は，基本的には数学としてはよく知られている表現論の知識からなるが，量子論の立場から，量子論のテーマに応用しやすいよう再構成している．そのため，記号も量子論のものを用いている．そして，量子論への応用のために必要となる表現論の複数のテーマを扱うことで，量子論における表現論の全体像が見えやすくなっている．同時に，これらの複数のテーマの間の類似性を強調しているので，テーマ間のアナロジーが効きやすいように構成されている．これにより，やや進んだ表現論のテーマも比較的容易にそのポイントを掴むことができる．このように，表現論的考え方が量子論の理解のための基本的なインフラとして機能するように構成されている．著者は主に量子情報を専門に研究しているため，本書の内容は量子論の中でも量子情報への応用を意識したものであるが，本書にまとめられた内容は，量子情報の分野を超え，量子論全般の理解にとって有益なものになると考えている．そのため，本書を読破した暁には，量子論を表現論の視点からより深く理解することが可能となるで

あろう．さらに，本書の姉妹編である『量子情報への表現論的アプローチ』を読み進めることも可能である．

以下，各章の構成について述べる．第1章では，測定，状態，合成系，エンタングルメントなどの量子論の基礎概念を説明し，量子系を記述するための数学的な記号を準備する．ここで導入する記号は，群の表現論を扱う上でも，便利なものが多い．本書では，この章で導入する記号の下で一貫して群の表現論を扱う．

第2章では，一般の群についての表現論を扱う．特に，標準的な表現の範囲に留まらず，量子論で重要となる射影的表現についても詳しく説明する．射影的表現は群の拡大と関係が深く，この点について詳しく触れる．射影的表現まで含めて表現論を議論するには，因子団を用いた扱いが必要となり，煩雑な記述となる．一般に射影的表現に拡張する議論は，本質的でない上に，記述の煩雑さだけが増すので，標準的な表現論のテキストでは射影的表現の扱いは極めて少ない．しかし，射影的表現に拡張する議論は量子論への応用を考えた場合本質的であるので，本書では，あえてこのような基礎的内容からスタートした．本書では，後の章も含め因子団を用いた射影的表現に関する議論を行っており，この点は類書にない特色である．また，有限群の場合には，より踏み込んで，群上の Fourier 変換についても触れる．この概念は，解析学と代数学を結びつける概念である．さらに，有限群の代表例である置換群の表現についても触れる．

第3，4，5章では，Lie 群と Lie 環の表現論を扱う．特に，第3章では，以下に述べる個別の Lie 群，Lie 環に依存しない一般的な議論を扱う．従来のテキストでは，Lie 群，Lie 環の射影的表現について扱ったものがなかったが，第3章では第2章での議論を組み合わせることで，Lie 群，Lie 環の射影的表現についても扱う．さらに，Lie 群上での Fourier 変換についても射影的表現の場合も含めて扱った．その他，第6章の議論で必要となるいくつかの基礎概念についても触れる．続く，第4章では具体的な Lie 群の表現論を扱った．Lie 環の表現は最大ウェイトによる分類が可能であるため，Lie 群の表現は対応する Lie 環の表現から扱った方がわかりやすい．また，量子論でも，Lie 環が重要な概念となることが多い．そのため，第4章では Lie 環の表現から Lie 群の表現を与える構成をとった．最初に，Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(1,1)$ の表現を扱う．前者と後者はコンパクト性の有無で扱いが異なるが，意外にも共通点が多いので，統

一的に扱う．その後に，Lie 環 $\mathfrak{su}(r)$ を扱い，その Young 図形との関係について述べる．特に，テンソル積空間上での表現は置換群の表現と密接に結びつき，その構造は Schur 双対とよばれる．また，Lie 群の働きを離散群で実現する問題はデザインとよばれるが，デザインについても扱った．第5章では一般の Lie 環，Lie 群の表現を扱った．ここでも同様に，Lie 環の表現から Lie 群の表現を与える手法をとった．第5章ではコンパクト Lie 群だけでなく，一部の非コンパクト Lie 群の表現も扱った．非コンパクト Lie 群の表現は極めて複雑で難解であるが，本書では量子論と関係の深い一部のタイプの表現のみ扱うことにした．このようなタイプの表現は，コンパクトな場合とのアナロジーが効くので相対的に理解が容易である．この章は（特に後半部分は）かなり進んだ内容であるので，最初は飛ばして読むことも可能である．

第6章では Bose 量子系を与える Heisenberg 表現を扱った．Heisenberg 表現は射影的表現となるので，第3章での射影的表現の一般論がここで生かされる．また，スクイジングに対応する $\mathfrak{su}(1,1)$ の表現についても扱う．さらに，多モードの量子系についても扱う．この量子系は連続変数系ともよばれ，一面において実装が容易な量子系として注目されている．同時に，場の量子論で現れる第二量子化についても簡単に触れる．この部分でテンソル積状態の物理的な意味についても触れる．なお，第6章の後半の*を付した節については，第5章の後半の知識が必要となる．第7章では，第6章で扱った表現の離散版である離散 Heisenberg 表現を扱う．一般に，離散 Heisenberg 表現は有限体を基礎に構成されるが，可換環 $\mathbb{Z}_d$ を基礎に構成する場合もあり，第7章では双方の場合について扱う．さらに，第6章でのスクイジングに対応する表現の離散版についても扱う．これらの表現は量子誤り訂正とも密接な関係にある．第7章は構造的に第6章と関連しているものの，第6章とは独立に読むことも可能である．有限群の表現を扱っているため，第7章は第2章を読んだ後に読み進めることも可能である．

なお，特に込み入ったテーマを扱った部分については，節や例のタイトルに*を付すことにした．この部分は，後の部分でも，*を付した部分にのみ使われる内容であるので，*を付した部分を飛ばして読んでも理解できるように構成されている．初学者にはなるべく，*を付した部分を飛ばして読むことを勧める．その他，本書では，表現論に関連する記号の煩雑さを考慮して，複数の記号表を第1章の前にまとめてある．適宜，この記号表を参照の上，読み進め

てもらいたい．

このように，本書では量子論で有効となる表現論の知識をまとめ，その上で，表現論に基づいた量子論の基礎を与えた．本書を通じて，一人でも多くの方が量子論と表現論に興味を持って頂けたら著者の望外の喜びである．最後に，本書をまとめるにあたってご協力して頂いた多くの方々に感謝の意を表したい．とりわけ，名古屋大学の伊師英之准教授，熊谷亘博士，北海道大学の洞彰人教授，山形大学の三枝崎剛博士には，本書をまとめる上で適切な助言を頂いた．また，共立出版の寿日出男氏，赤城圭氏には原稿をまとめる上で大変お世話になった．これらの方々には感謝の意を表したい．

林　正人

目　次

記号表

表 0.1 群を表す記号（ここに記載されていない群については表 3.1, 3.2, 3.3 を参照のこと）

記号	名称	ページ
$H \times K$	群 H と K の直積群	16
$H \rtimes K$	群 H と K の半直積	16
$H(K:H)$	群 H の群 K による拡大の群	18
$\mathrm{Ker}\, f$	準同型写像 f の核	14
$[G,G]$	G の交換子群	15
$\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$, $\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$	r 自由度離散 Heisenberg 群	19, 20, 21
$C_G(M)$	G の部分群 M の中心化群	14
$C(G)$	G の中心 $(C_G(G))$	14
$N_G(M)$	M の正規化群	14
$\mathrm{U}(1)$	単位円周	12
U_k	$\mathrm{U}(1)$ の部分群 $\{e^{i2\pi j/k} \mid j \in \mathbb{Z}\}$	12
S_n	n 個の要素の置換からなる置換群	12
$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 上の一般線型群	21
$\mathrm{U}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 上のユニタリ写像からなる群	21
$\mathrm{SU}(\mathcal{H})$	$\mathrm{U}(\mathcal{H}) \cap \mathrm{SL}(\mathcal{H})$	21
G_0	G の単位元 e を含む連結成分	56
$\pi_1(G)$	基本群	83
$\tilde{G}$	可換群 C の G による拡大, C が $\pi_1(G)$ のときの普遍被覆群	31, 32, 85
$\check{G}$	G の二重被覆群	85
$\overline{G}_\omega$	$\omega \in C(G)$ から定義される G の $\mathrm{U}(1)$ による拡大	34
$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{Z}_d)$	離散シンプレクティク群	205
G/H	商空間, 剰余群（商群）	13
$\mathbb{Z}_k$	$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$	14
$\mathbb{F}_p$	素数 p についての有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	20
$\mathbb{F}_q$	$\mathbb{F}_p$ の n 次の代数拡大 $(q = p^n)$	20
$\mathbb{F}_q^{(k)}$		209
$\mathbb{X}$	$\mathbb{F}_q$ または $\mathbb{Z}_d$ を表す	200

表 0.2　Lie 環を表す記号（ここに記載されていない群については表 3.4, 3.5, 3.6 を参照のこと）

記号	名称	ページ
$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の直和	64
$\mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の半直積	77
$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$	$\mathfrak{g}$ の複素化	64
$\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$ の中心	64
$\mathfrak{h}$	Cartan 部分代数	136
$\mathfrak{k}$	極大コンパクト部分代数	158
$\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線型写像の集合	21
$\mathfrak{u}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 上の歪エルミート行列の集合	72
$\mathfrak{o}(V)$	V 上の実反対称行列の集合	74

表 0.3　集合

記号	名称	ページ
$\hat{G}$	G の既約なユニタリ表現の集合	25
$\hat{G}_{\mathrm{f}}$	上記のうち有限次元表現の集合	25
$\hat{G}([\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}])$	因子団が $[\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}] \in H(G:\mathrm{U}(1))$ となる既約な射影的ユニタリ表現の集合	33
$\hat{G}_{\mathrm{f}}([\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}])$	上記のうち有限次元表現の集合	33
$\hat{\mathfrak{g}}$	Lie 環 $\mathfrak{g}$ の既約な歪エルミート表現の集合	87
$\hat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{f}}$	$\hat{\mathfrak{g}}$ の中で有限次元表現の集合	87
$\mathcal{Y}^r$	深さ r 以下の Young diagram の集合	51
$\mathcal{Y}_n$	大きさ n の Young diagram の集合	51
$\mathcal{Y}_n^r$	$\mathcal{Y}^r \cap \mathcal{Y}_n$	51
$Y_{U,r}(\boldsymbol{n})$	Semistandard Young tableau の集合	51
$Y_S(\boldsymbol{n})$	Standard Young tableau の集合	51
Φ	ルート系	114, 133
$\Phi_{\mathfrak{g}}$	複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ から決まるルート系	141
Δ	基本系	114, 134
D	単位円板	101

表 0.4　表現についての記号

表現の記号	名称	群（Lie 環）	表現空間	ページ
$\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2$	直和表現	G ($\mathfrak{g}$)	$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$	23, 73
$\mathsf{f}_1 \otimes \mathsf{f}_2$	テンソル積表現	G ($\mathfrak{g}$)	$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$	23, 73
$\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$		$G_1 \times G_2$	$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$	30
ad	随伴表現	$G(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$	74, 75
$\mathsf{f}_H \rtimes \mathsf{f}_K$	半直積表現	$H \rtimes K$		35
$\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T$		$H \rtimes K$		36
$\mathsf{f}_H \rtimes \mathsf{f}_K \otimes \mathsf{f}'_K$		$H \rtimes K$		36
$\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}'_T$		$H \rtimes K$		36
$\bar{\mathsf{f}}$	複素共役表現			39
$\tilde{\mathsf{f}}$		$\tilde{G}$		31, 86
ι		$\mathrm{SU}(2)(\mathfrak{su}(2))$	$\mathbb{R}^3$	100
W	Heisenberg 表現	$\mathbb{R}^2$, $H(2,\mathbb{R})$	$L^2(\mathbb{R})$	167
U		$\mathrm{U}(r)$	$L^2(\mathbb{R})$	171, 175
W^r	r モードの Heisenberg 表現	$\mathbb{R}^{2r}$, $H(2r,\mathbb{R})$	$L^2(\mathbb{R}^r)$	175
S		$\mathrm{SU}(1,1)$ $(\mathfrak{su}(1,1))$	$L^2(\mathbb{R})$	184
S^2		$\mathrm{SU}(1,1)$ $(\mathfrak{su}(1,1))$	$L^2(\mathbb{R}^2)$	188
S^r		$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$	$L^2(\mathbb{R}^r)$	191
$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}$		$\mathbb{Z}_d^2$	$\mathbb{C}^d$	196
$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}$	離散 Heisenberg 表現	$\mathbb{Z}_d^2$	$\mathbb{C}^d$	196
$\mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}$		$\mathrm{H}(2,\mathbb{Z}_d)$	$\mathbb{C}^d$	198
$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}$		$\mathbb{F}_q^2$	$\mathbb{C}^q$	199
$\mathsf{W}_{\mathbb{F}}$	離散 Heisenberg 表現	$\mathbb{F}_q^2$	$\mathbb{C}^q$	199
$\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r$	離散 Heisenberg 表現	$\mathbb{F}_q^{2r}$, $\mathbb{Z}_d^{2r}$	$\mathbb{C}^{d^r}$, $\mathbb{C}^{q^r}$	200
$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X}}^r$		$\mathbb{F}_q^{2r}$, $\mathbb{Z}_d^{2r}$	$\mathbb{C}^{d^r}$, $\mathbb{C}^{q^r}$	200
$\mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}$		$\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$	$\mathbb{C}^{d^r}$	202
$\mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}$		$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$	$\mathbb{C}^{q^r}$	202
$\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)$	メタプレクティク表現	$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{X})$	$\mathbb{C}^{d^r}$, $\mathbb{C}^{q^r}$	210
$\mathsf{V}_{\mathbb{X}}^r$		$\mathbb{X}^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r,\mathbb{X})$	$\mathbb{C}^{d^r}$, $\mathbb{C}^{q^r}$	214

表 0.5　ベクトル

記号	名称	ページ
$\|X\rangle\rangle_{A,B}$	$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上のベクトル	8
$\|\lambda; j\rangle$	$\mathcal{U}_\lambda(G)$ の正規直交基底, SU(2) のときはウェイトベクトル	25, 106
$\|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}\rangle$	最大ウェイトベクトル	144, 160, 164
$\|\lambda; j; j'\rangle$	$\|\lambda; j\rangle \otimes \|j'\rangle$	26
$\|\lambda : \zeta\rangle$	コヒーレントベクトル	112
$\|\boldsymbol{\lambda} : \zeta\rangle$	コヒーレントベクトル	156, 162, 164
$\|-\frac{1}{2}\boldsymbol{v} : \zeta\rangle$	コヒーレントベクトル	194
$\|n\rangle$	個数ベクトル	167
$\|\hat{e}_l\rangle$	双対計算基底	44
$\|\hat{e}_{\mathbb{Z}}(l)\rangle$, $\|\hat{e}_{\mathbb{F}}(l)\rangle$	双対計算基底	197, 199

表 0.6　ベクトル空間を表す記号

記号	名称	ページ
$\mathbb{C}[G]$	群環	45
$L^2(G)$		46, 92, 93
$L^2(\hat{G})$		45, 92, 93
$L^2(G, inv)$	$L^2(G)$ のうち共役類で決まる関数の集合	49
$L^2(G, inv, \mathbb{R})$	$L^2(G, inv)$ のうち実数値関数の集合	49
$L^2(\hat{G}[\mathcal{E}])$		50
$\mathcal{U}_\lambda(G), \mathcal{U}_\lambda$	$\lambda \in \hat{G}$ に対応する既約表現空間	25
$V \otimes \mathbb{C}$	複素内積を持つ V の複素化	38
$V \bar{\otimes} \mathbb{C}$	エルミート内積を持つ V の複素化	38

表 0.7　行列または作用素を表す記号

記号	ページ
J	40
J_d	40
$E_{0,1}$	97
$K_{+,1}$	97
$K_{-,1}$	97
M_γ	98, 206
P_ζ	98, 206
Q_ζ	206
F_1^x	98
F_1^y	98
F_1^z	98
F_{-1}^x	100
F_{-1}^y	100
F_{-1}^z	100
$E_{0,-1}$	100
$K_{+,-1}$	100
$K_{-,-1}$	101
W	102
$\Delta_\rho[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]$	169
$\mathsf{X}_{\mathbb{Z}}$	196
$\mathsf{Z}_{\mathbb{Z}}$	196
$\mathsf{X}_{\mathbb{F}}(s)$	198
$\mathsf{Z}_{\mathbb{F}}(t)$	198
DFT	44
$F_{j,l}^x$	113
$F_{j,l}^y$	113
$F_{j,l}^z$	113
E_j	113
$K_{j,l;+}$	113
$K_{j,l;-}$	113
$F_j^{z,u}$	116
a	167
Q	166, 168
P	166, 168
N	168
$\mathsf{U}_{k,j}$	178

表 0.8　その他の記号

記号	名称	ページ
$\overline{X}$	X の複素共役行列	8
X^T	X の転置行列	8
$X^\dagger$	X の共役転置行列	8
$\|G\|$	群 G の要素の数（位数）	12
$[g]$	g を代表元とする剰余類	13
$\|G:H\|$	H の G における指数	13
a^G	a を含む G の共役類	14
$H\cdot K$	集合 H と集合 K の直積集合	15
$\{T(k),\phi(k,k')\}$	因子団	17
d_λ	$\mathcal{U}_\lambda(G)$ の次元または形式的次元	25, 91
$C^{\lambda''}_{\lambda,\lambda'}(G)$	重複度定数	41
χ_{f}	表現 f の指標	26
χ_λ	既約指標	26
$\mathrm{supp}(\chi_{\mathsf{f}})$	指標 χ_{f} のサポート	28
$\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$	因子団	31
$H(\mathsf{f})$	f から決まる $H(G:\mathrm{U}(1))$ の要素	31
$\lambda^*\in\hat{G}$	f_λ の複素共役表現のラベル	39
$\mathcal{F}$	Fourier 変換	49, 94
$\mathcal{F}^{-1}$	逆 Fourier 変換	49, 94
$(X,Y)_{\mathfrak{g}}$	Killing form	78
C_{f}	Casimir 作用素	82
μ_G	規格化された群 G の不変測度	90
μ_Θ	規格化された等質空間 Θ の不変測度	91
$\mu_n(r)$	Plancherel 測度	53
$\mu_{\hat{G}[\mathcal{E}]}$	Plancherel 測度	96
κ		102
$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}$		189
$\omega_{\mathbb{Z}}$		196
$\tau_{\mathbb{Z}}$		196
$\omega_{\mathbb{F}}$		198
$\tau_{\mathbb{F}}$		199
$[m_1,\ldots,m_{r-1}]$	Dynkin 指数	114, 134
$(m_1,\ldots,m_{r-1})$	Young 指数	116
in		116
$\boldsymbol{\delta}$		121, 145

第 1 章

量子系の数学的基礎

1.1 系，状態および測定

ミクロな物理系を記述する量子論では，記述する対称を**量子系**または，**系**とよび，それは数学的にはエルミート内積が定義された複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ で与えられる．$\mathcal{H}$ は有限次元の場合もあるが無限次元の場合もあり，有限次元の場合も含めそのような複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ は **Hilbert 空間**とよばれる[1]．$\mathcal{H}$ はエルミート内積付きベクトル空間であるから，正規直交基底系 $\{e_i\}$ がとれる．それぞれの正規化された基底 e_i は互いに識別可能な量子系の状態を表す．一般の系の状態は，正規化されたベクトル $x \in \mathcal{H}$ で与えられる．基準となる正規直交基底系（基準基底系）を 1 つ定めると，一般の状態を表すベクトル x はそれらの重ね合わせ（線型結合）$\sum_i x_i e_i$ で表される．量子論では，$\mathcal{H}$ の要素 x に対して，2 通りの表し方を用いる．1 つはケットベクトル $|x\rangle$ による表記であり，もう 1 つはブラベクトル $\langle x|$ による表記である．これらの表記は実数係数に関する線型性を保つように定義されるが，複素数倍については $a \in \mathbb{C}$ について，

$$|ax\rangle = a|x\rangle,\ \langle ax| = \bar{a}\langle x| \tag{1.1}$$

を満たすように定義する．特に，基準基底 e_i に対しては $|e_i\rangle, \langle e_i|$ とせず，$|i\rangle$,

[1] 無限次元の場合は与えられたエルミート内積の下での**完備性**も満たすとする．

$\langle i|$ と記すことにする．

一方，$x, y \in \mathcal{H}$ のエルミート内積 $\langle x|y\rangle$ を $a, b \in \mathbb{C}$ について，$\langle ax|by\rangle = \bar{a}b\langle x|y\rangle$ となるように定義すると，x と y の内積 $\langle x|y\rangle$ はブラベクトルとケットベクトルを掛け合わせたもの $\langle x|\cdot|y\rangle$ と見なすことができる．

状態に加え，量子系で重要となるのが物理量である．古典力学に従う系では，物理量の値は系の状態に応じて決まるため，物理量は系の状態を引数に持つ関数として与えられる．しかし，量子系では系の状態が確定しても物理量は必ずしも確定した値をとらず，系を表す Hilbert 空間上のエルミートな線型写像として定義される[2]．

物理量の中で最も重要なものは，ハミルトニアンとよばれる物理量で，一般に H で表される．これが重要である理由は，時間発展を与える物理量であるからである．H はエルミート行列であるので，t を時間を表す任意の実数とすると，e^{itH} はユニタリ行列となる．したがって，写像 $|x\rangle \mapsto e^{itH}|x\rangle$ は系の状態の変化を表すことになる．実は，この写像によって時間 t を経たときの状態の変化を表すことができる．

それでは，物理量 A が確定した値をとらないということはどういう意味であろうか？　そのためには，物理量 A の測定を考えないといけない．なぜなら，測定を通じて初めて物理量の値は確定するからである．測定を考えるために，初めに簡単のため，エルミート行列 A の固有値に重複（すなわち縮退）がない場合を考えよう．すると，A の固有値分解は

$$A = \sum_i a_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \tag{1.2}$$

で与えられる．ここで，a_i は A の固有値であり，ϕ_i は固有値 a_i に対応する固有ベクトルである．物理量 A の測定を行うと，測定値として，得られる値は，エルミート行列 A の固有値 a_i に限られる．どの固有値が実際の測定値として与えられるかは，系の状態に応じて決まる．ほとんどの場合測定値は確率的にしか定まらない．状態が正規化されたベクトル $x \in \mathcal{H}$ であるとき，測定値として a_i が得られる確率は

$$\langle x|\phi_i\rangle\langle\phi_i|x\rangle = |\langle x|\phi_i\rangle|^2 \tag{1.3}$$

---

[2] 無限次元の場合には，自己共役作用素として定義される．

で与えられる．これが，確率分布を与えることは，$\{\phi_i\}_i$ が正規直交基底であることから，$\sum_i |\langle x|\phi_i\rangle|^2 = 1$ となり，確認できる．

特に，状態 $|x\rangle$ が正規直交基底 $\{\phi_i\}_i$ の 1 つであることが既知であれば，その状態 $|x\rangle$ が，正規直交基底 $\{\phi_i\}_i$ の中のどれであるかは，上記の物理量の測定で判定できる．このように，一般には，正規直交基底 $\{\phi_i\}_i$ が与えられれば，基底 ϕ_i に対応する測定値が確率 (1.3) で与えられる測定が実現できる．

しかし，一般のエルミート行列は，固有値に重複（縮退）があることがある．この場合，固有値分解 (1.2) に代わり，スペクトル分解

$$A = \sum_i a_i E_i \tag{1.4}$$

を考えることで上記の議論は以下のように一般化できる．この場合，A の固有値は a_i であり，固有値 a_i に対応する固有空間は射影 E_i の値域となる．物理量 A の測定を行うと，測定値として a_i が得られる確率は $\langle x|E_i|x\rangle = \mathrm{Tr}\, E_i|x\rangle\langle x|$ で与えられる．したがって，一般には，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の直和分解 $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ が与えられたとき，$\mathcal{H}_i$ への射影 E_i の集合 $\{E_i\}_i$ から測定が定義できる．このような測定を**射影測定**とよぶ．

ここで，注意すべきことは，上記の確率が，$|x\rangle$ よりもむしろ，$|x\rangle$ への 1 次元射影 $|x\rangle\langle x|$ で決まるという点である．そのため，位相 $e^{i\theta}$ を掛けて，$|x\rangle$ を $|e^{i\theta}x\rangle$ に変更しても，対応する 1 次元射影は $|x\rangle\langle x|$ のままである．

そもそも，量子系は測定が困難であるため，系の状態が完全に特定の状態 $|x\rangle$ にあるようにするのは，困難である．むしろ，他の状態 $|y\rangle$ と比率 $(1-p):p$ で混じってしまうことの方が自然である．このような場合，上記の測定を行ったときに，測定値 a_i が得られる確率は

$$(1-p)\,\mathrm{Tr}\, E_i|x\rangle\langle x| + p\,\mathrm{Tr}\, E_i|y\rangle\langle y| = \mathrm{Tr}\, E_i((1-p)|x\rangle\langle x| + p|y\rangle\langle y|) \tag{1.5}$$

で与えられる．このような混じった状態をどのように記述するかが問題である．量子系は測定以外の方法で，その系について感知することができないので，測定で区別できない限り，同じ状態と見なす方がよいであろう．そう考えると，(1.5) の右辺を用いて，混じった状態を定義するのがよいであろう．すなわち，上記のように混じった状態を $(1-p)|x\rangle\langle x| + p|y\rangle\langle y|$ で表すことにする．一般に，複数の状態 $|\phi_i\rangle$ が確率 p_i で混ぜ合わされた状態は

$$\rho := \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \tag{1.6}$$

で表される．上記の ρ は，トレースが 1 で対角成分が全て 0 以上となるエルミート行列となる．これまでの議論から，上記の ρ のみがわかれば，個々の物理量の測定を行う際の測定値の出現確率を正しく記述することができる．逆に，この性質を満たす ρ はその固有値分解を考えることで (1.6) の右辺のように表すことができる．なお，(1.6) の右辺は一般には必ずしも，混ぜ合わす状態 $|\phi_i\rangle$ が正規直交基底である必要はない．以下では，トレースが 1 で対角成分が全て 0 以上となるエルミート行列 ρ を**密度行列**とよぶ．そして，$\mathcal{H}$ のベクトルで表される状態のことを，密度行列との対比で，**波動関数**とよぶ．密度行列の中で，波動関数を用いて表せるものを**純粋状態**とよび，純粋状態以外の密度行列を**混合状態**とよぶ．

ここで再び，物理量 A の測定について考えよう．このとき，状態の密度行列が ρ で与えられている場合，その**期待値**は

$$\sum_i a_i \operatorname{Tr} E_i \rho = \operatorname{Tr} A\rho \tag{1.7}$$

で与えられる．上記の議論から，密度行列 ρ は確率論における確率分布を非可換化したものと考えることができる．一方，物理量 A は確率論における確率変数を非可換化したものと見なせる．確率論においては，期待値が確率変数と確率分布の値とを掛けて得られる値を足し合わせて得られるものであったが，量子論においても，それぞれの対応物を掛け合わせて，和の代わりにトレースをとると，期待値が得られるので，上記の対応が自然であることが確認できる．また，その**分散**は

$$\begin{aligned}\Delta_\rho^2 A &:= \sum_i a_i^2 \operatorname{Tr} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\rho - (\operatorname{Tr} A\rho)^2 \\ &= \operatorname{Tr} A^2\rho - (\operatorname{Tr} A\rho)^2 = \operatorname{Tr}(A - (\operatorname{Tr} A\rho)I)^2\rho \end{aligned} \tag{1.8}$$

で与えられる．

2 つの物理量 A と B が可換であるときは，同時対角化を与える PVM が同時測定を与えることになる．この同時測定の下での共分散は

$$\Delta_\rho A \circ B$$
$$:= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[(B-(\operatorname{Tr}B\rho))(A-(\operatorname{Tr}A\rho))+(A-(\operatorname{Tr}A\rho))(B-(\operatorname{Tr}B\rho))]\rho \tag{1.9}$$

で与えられる．しかし，可換でない場合については，$\Delta_\rho A \circ B$ は2つの物理量 A と B のある種の相関を表すと考えることができるが，同時測定が定義できないので共分散と見なすことはできない．

これまでの議論では，正規直交基底から測定が1つ決まることになっていたが，この議論は次のように一般化できる．すなわち，必ずしも，正規化されていない $\mathcal{H}$ の要素の組 $\{|\phi_i\rangle\}_i$ が与えられたとき，

$$\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I \tag{1.10}$$

が成り立つとしよう．ここで，I は単位行列である．この場合，$\{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\}_i$ が単位行列 I の分解を与えるわけであるが，同時に測定を指定している [15]．このような単位行列の分解は正作用素値測度，(Positive operator-valued measure; POVM) とよばれる．系の状態が ρ であるとき，これに対応する測定を行うと，測定値 i が確率 $\langle\phi_i|\rho|\phi_i\rangle$ で得られる．このような測定は，系を拡大することで実現可能である [12]．このタイプの測定は連続値の場合にも以下のように一般化できる．すなわち，パラメータ集合 Θ でパラメトライズされた正規化されたベクトル $|\phi_\theta\rangle$ と Θ に値を持つ測度 μ が与えられ，

$$\int_\Theta |\phi_\theta\rangle\langle\phi_\theta|\mu(d\theta) = I \tag{1.11}$$

を満たすとき，ここで与えられた単位行列の分解は POVM とよばれ，上で述べた意味で，測定を与える．

一般に，十分に長い時間，外界との相互作用が十分少ない場合，系の状態は，熱平衡状態に達すると考えられる．熱平衡状態とは，H をハミルトニアンとすると，$\frac{1}{\operatorname{Tr} e^{\beta H}} e^{\beta H}$ で与えられる密度行列のことである．ここで，β とは逆温度とよばれるパラメータである．

このように，量子論では，物理量（特に，ハミルトニアン）やそのスペクトル分解，$\mathcal{H}$ の要素である波動関数，密度行列などが重要となる．

1.2　合成系

2つの量子系 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ を考えよう．例えば，系 $\mathcal{H}_A$ がある粒子の内部自由度を表していて，系 $\mathcal{H}_B$ がその粒子の位置に関する自由度を表しているとすると，その粒子全体の自由度を表す量子系が必要となる．そのような量子系は系 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ の合成系とよばれる．合成系はテンソル積空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ で与えられる．テンソル積空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ とは $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ のそれぞれの正規直交基底を $\{|v_i\rangle\}_{i=1}^k$ と $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^l$ とすると，$\{|v_i, u_j\rangle\}_{1\le i\le k, 1\le j\le l}$ が正規直交基底となる空間である．ときどき，直和空間 $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ が合成系を表すと考えがちであるが，合成系を表すのはテンソル積空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ である．直和空間 $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ では正規直交基底が $\{|v_i\rangle\}_{i=1}^k \cup \{|u_j\rangle\}_{j=1}^l$ となる．この事実を確認するために古典的な場合を考えよう．古典的な場合，状態は観測される事象の集合を確率空間とする確率分布で与えられる．また，量子系の基底は古典系の事象に対応すると考えることができる．したがって，確率空間となる事象の集合が基礎となる．古典的な場合，合成系の事象はそれぞれの系の事象のが個別に定まる．すなわち，合成系の事象の集合はそれぞれの系の事象の集合のその直積集合となる．ゆえに，古典系の事象と量子系の基底の関係を考えると，合成系の基底は $\{|v_i\rangle\}_{i=1}^k \cup \{|u_j\rangle\}_{j=1}^l$ ではなく，$\{|v_i, u_j\rangle\}_{1\le i\le k, 1\le j\le l}$ となる．それゆえ，合成系はテンソル積空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ になる．特に，合成系の基底を単一の番号で順番付けする場合，$|e_{i+k(j-1)}\rangle = |v_i, u_j\rangle$ と番号付けすることとする．

次に系 $\mathcal{H}_A$ と系 $\mathcal{H}_B$ に独立に状態 ρ と σ が準備された場合を考えよう．この場合，$\rho = \sum_{i,i'=1}^k a_{i,i'}|v_i\rangle\langle v_{i'}|$, $\sigma = \sum_{j,j'=1}^l b_{j,j'}|u_j\rangle\langle u_{j'}|$ であるとすると，合成系上の状態は**テンソル積状態** $\rho\otimes\sigma := \sum_{i,i'=1}^k \sum_{j,j'=1}^l a_{i,i'}b_{j,j'}|v_i, u_j\rangle\langle v_{i'}, u_{j'}|$ で与えられる．以下，議論を簡単にするために，これらが共に対角の場合 $\rho = \sum_{i=1}^k a_i|v_i\rangle\langle v_i|$, $\sigma = \sum_{j=1}^l b_j|u_j\rangle\langle u_j|$ について考えよう．この場合，$\rho\otimes\sigma = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i b_j|v_i, u_j\rangle\langle v_i, u_j|$ となり，古典的に見ると，事象 (v_i, u_j) が確率 $a_i b_j$ で起きるということを意味している．したがって，古典的な場合の独立性と矛盾しない．このような事情から，量子系では独立に状態が準備された場合，状態はテンソル積状態になる．

ここで，波動関数 $|v\rangle = \sum_{i=1}^k c_i|v_i\rangle$, $|u\rangle = \sum_{j=1}^l f_j|u_j\rangle$ のテンソル積 $|v\rangle \otimes |u\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_i f_j|v_i, u_j\rangle$ が基底の取り方に依存しないことを注意

しておく必要がある．この事実を確認するには，異なる $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ の正規直交基底 $\{|\tilde{v}_i\rangle\}_{i=1}^k$ と $\{|\tilde{u}_j\rangle\}_{j=1}^l$ に基づいて定義したテンソル積が $|v\rangle \otimes |u\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_i f_j |v_i, u_j\rangle$ に一致することを示せば十分である．波動関数 $|v\rangle$, $|u\rangle$ が $|v\rangle = \sum_{s=1}^k \tilde{c}_s |\tilde{v}_s\rangle$, $|u\rangle = \sum_{t=1}^l \tilde{f}_t |\tilde{u}_t\rangle$ と記述できるとき，$\{|\tilde{v}_s\rangle\}_{s=1}^k$ と $\{|\tilde{u}_t\rangle\}_{t=1}^l$ に基づいて定義した場合のテンソル積は $\sum_{s,t} \tilde{c}_s \tilde{f}_t |\tilde{v}_s, \tilde{u}_t\rangle$ である．ユニタリ行列 U, V が $|\tilde{v}_s\rangle = \sum_i V_{s,i}|v_i\rangle$, $|\tilde{u}_t\rangle = \sum_t U_{t,j}|u_j\rangle$ を満たすとすると，$c_s = \sum_s \tilde{c}_s V_{s,i}$, $f_t = \sum_t \tilde{f}_t U_{t,j}$ となる．よって，

$$\sum_{s,t} \tilde{c}_s \tilde{f}_t |\tilde{v}_s, \tilde{u}_t\rangle = \sum_{s,t,i,j} \tilde{c}_s \tilde{f}_t V_{s,i} U_{t,j} |v_i, u_j\rangle = \sum_{i,j} c_i f_j |v_i, u_j\rangle$$

を得る．したがって，$\mathcal{H}_A$ 上の行列 X と $\mathcal{H}_B$ 上の行列 Y のテンソル積についても，

$$X \otimes Y(|v\rangle \otimes |u\rangle) := (X|v\rangle) \otimes (Y|u\rangle) \tag{1.12}$$

と定義することで，合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の線型写像として定義される．なお，$|v\rangle$ と $|u\rangle$ のテンソル積が基底のとり方に依存しないので，写像 $X \otimes Y$ の定義も基底のとり方に依存しない．したがって，密度行列 $\rho = \sum_{i,i'=1}^k a_{i,i'} |v_i\rangle\langle v_{i'}|$, $\sigma = \sum_{j,j'=1}^l b_{j,j'} |u_j\rangle\langle u_{j'}|$ のテンソル積状態 $\rho \otimes \sigma$ は基底のとり方に依存せずに定義でき，$\sum_{i,i'=1}^k \sum_{j,j'=1}^l a_{i,i'} b_{j,j'} |v_i, u_j\rangle\langle v_{i'}, u_{j'}|$ で与えられる．なお，合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の状態はテンソル積状態 $\rho \otimes \sigma$ やその凸結合 $\sum_j p_j \rho_j \otimes \sigma_j$ で記述できる状態（**セパラブル状態**）だけではない．（p_j は確率を表し，ρ_j, σ_j はそれぞれ，$\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ 上の密度行列を表す．）例えば，ベクトル $\sum_j \sqrt{p_j} |v_j, u_j\rangle$ で与えられる純粋状態はテンソル積状態の凸結合として表せないので，セパラブル状態ではない．そのような状態は**エンタングル**した状態といわれ，量子情報処理の資源として，大変盛んに研究されている．特に，状態のそのような性質を**エンタングルメント**とよばれる．

合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の状態が密度行列

$$\rho = \sum_{i,i'=1}^k \sum_{j,j'=1}^l c_{i,j,i',j'} |v_i, u_j\rangle\langle v_{i'}, u_{j'}|$$

で与えられているとき，任意の系 $\mathcal{H}_A$ 上の行列 X に対して，

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} \rho) X = \mathrm{Tr}\, \rho (X \otimes I_{\mathcal{H}_B})$$

を満たす系 $\mathcal{H}_A$ 上の状態は以下を満たす状態 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}\rho$ が存在する．この場合，系 $\mathcal{H}_A$ だけに注目した場合，系 $\mathcal{H}_A$ 上の状態は $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}\rho$ で与えられると考えるのが妥当である．状態 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}\rho$ は ρ の**部分トレース**とよばれ，以下の方法で具体的に計算できる．

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}\rho = \sum_{i,i'=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_{i,j,i',j}|v_i\rangle\langle v_{i'}|.$$

なお，ρ が基底 $\{|v_i, u_j\rangle\}_{i,j}$ の下で対角である場合は，部分トレースは対角成分からなる確率分布の周辺分布と一致する．部分トレースをとって得られる密度行列を**縮約密度行列**とよぶ．以下，混乱の恐れがない場合，$\mathcal{H}_B$ を下付き添え字として用いる場合，B と省略する．

そして，エルミート行列のなす線型空間を行列ノルムに関するノルム付き線型空間 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ と捉えたとき，部分トレース $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ への線型写像となる．この線型写像のノルムは $\min\{\dim\mathcal{H}_B, \dim\mathcal{H}_A\}$ となる．すなわち，$\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ 上のエルミート行列 X について

$$\frac{\|\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B} X\|}{\|X\|} \le \min\{\dim\mathcal{H}_B, \dim\mathcal{H}_A\} \tag{1.13}$$

が成り立つ．

本書では，混乱が生じない限り，$\mathcal{H}_A$ 上の行列 X と，$\mathcal{H}_B$ 上の行列 Y に対して，$\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ 上の行列 $X\otimes I_{\mathcal{H}_B}$, $I_{\mathcal{H}_A}\otimes Y$ を単純に X, Y と略記する．そのため，$X\otimes Y$ は XY と書く．

以下，$\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ の基準基底が与えられた場合に，用いられる省略記号について述べる．この場合，2つの量子系を扱うので，それぞれの基準基底を表すケットベクトルを $|j\rangle_A, |j\rangle_B$ と記し，注目している系を区別する．そのため合成系 $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ の基底は $|k\rangle_A\otimes|j\rangle_B$ で与えられるが，簡単のため $|k,j\rangle_{A,B}$ と記すことにする．

以下の議論では，行列 $X=(x_{k,j})$ について，$\overline{X}$ は基準基底についての X の行列成分の**複素共役**をとって得られる行列を表し，X^T は基準基底についての X の**転置行列**を表す．そして，$X^\dagger$ は X の**共役転置行列**を表す．$\overline{X}$ と X^T は基準基底のとり方に依存するが，$X^\dagger$ はエルミート内積のとり方にのみ依存する．そして，合成系 $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ 上のベクトル $\sum_{k,j} x_{k,j}|k,j\rangle_{A,B}$ を $|X\rangle\rangle_{A,B}$

と記すことにする．

$$Y \otimes Z|X\rangle\rangle_{A,B} = |YXZ^T\rangle\rangle_{A,B} \tag{1.14}$$

が成り立つ．2 つのベクトル $|X\rangle\rangle_{A,B}$, $|Y\rangle\rangle_{A,B}$, の内積は

$$_{A,B}\langle\langle X|Y\rangle\rangle_{A,B} = \mathrm{Tr}\, X^\dagger Y \tag{1.15}$$

となる．

したがって，ベクトル $|X\rangle\rangle_{A,B}$ が状態ベクトルになる（すなわち，ノルムが 1 となる）条件は

$$\mathrm{Tr}\, X^\dagger X = 1 \tag{1.16}$$

となることである．部分トレースについては以下の公式が成り立つ．

$$\mathrm{Tr}_B\, |X\rangle\rangle_{A,B}\ {}_{A,B}\langle\langle X| = XX^\dagger, \quad \mathrm{Tr}_A\, |X\rangle\rangle_{A,B}\ {}_{A,B}\langle\langle X| = X^T\overline{X}. \tag{1.17}$$

1.3　多体系

n 個の粒子があり，個々の粒子の状態を表す量子系 $\mathcal{H}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ が与えられた場合を考える．これらの粒子が互いに識別可能である場合，n 個の粒子からなる合成系は $(((\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)\cdots) \otimes \mathcal{H}_n)$ で与えられる．このとき，テンソル積空間はテンソル積のとる順番に依存しないため，上記の空間は $(\mathcal{H}_1(\cdots(\mathcal{H}_{n-1} \otimes \mathcal{H}_n)))$ と一致する．したがって，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ と記す．特に，各 $\mathcal{H}_i$ が $\mathcal{H}$ と同型のときは，テンソル積空間は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ と略すことにする．

しかし，これらの粒子が同じ種類の粒子であり，識別不可能な場合は，このような表記はできない．そのような場合については，後の章で別途扱うことにする．仮に，n 個の粒子が同じ種類の粒子であっても，識別可能な場合がある．例えば，$\mathcal{H}_i$ が個々の粒子の内部自由度の量子系であり，個々の粒子の位置に関する状態が互いに確率 1 で区別可能な程度にわかっているとすると，合成系は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ で与えられる．

各 $\mathcal{H}_i$ に状態 ρ_i が独立に準備されたときの合成系の状態は $(((\rho_1 \otimes \rho_2)\cdots) \otimes \rho_n)$ で与えられる．行列のテンソル積もテンソル積のとる順番に依存しないた

め，この密度行列を $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n$ と記す．特に $\rho_i = \rho$ であるとき，すなわち，同一状態 ρ が独立に n 個準備されたときの密度行列を $\rho^{\otimes n}$ と記す．この密度行列は状態 ρ の n 階**テンソル積状態**とよばれる．上記の記法は ρ や ρ_i が密度行列とならない一般の行列の場合についても用いることとする．

また，テンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ 上の行列 A について特定の系 $\mathcal{H}_i$ についてのみ部分トレースを $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_i} A$ と記す．逆に，特定の系 $\mathcal{H}_i$ 以外の全ての系についての部分トレースを $\mathrm{Tr}_{\check{\mathcal{H}}_i} A$ と記す．特に，A が密度行列 ρ である場合，$\mathrm{Tr}_{\check{\mathcal{H}}_i} \rho$ を $\rho_{\mathcal{H}_i}$ または ρ_i と記す．

一方，系 $\mathcal{H}_i$ 上の行列 A_i に対して，テンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ 上の行列 $I^{\otimes i-1} \otimes A_i \otimes I^{\otimes n-i}$ を A_i と省略する．そして，$A_i = A$ であるとき，$\sum_{i=1}^n A_i$ を $A^{(n)}$ と記す．

先にも述べたが，量子論では，物理量（特に，ハミルトニアン）やそのスペクトル分解，$\mathcal{H}$ の要素である波動関数，密度行列などを取り扱うことが必要となる．しかし，個々の系 $\mathcal{H}_i$ が 2 次元であっても，その合成系の次元は 2^n となり，極めて複雑である．このような複雑な状況の下で，物理量や密度行列などを扱うことは困難を生じる．しかし，物理量や密度行列が物理的な変換に関する不変性などの性質を満たすことがわかっていると，系を記述するパラメータは激減し，その数学的取り扱いが極めて容易になる．本書の目的は，多体系などの複雑な量子系において，物理的な変換に関する不変性の下で，物理量や密度行列などの物理的に重要な量を自由度を落として取り扱う方法を提供することにある．

第2章

群の表現論

2.1　群と等質空間

物理学では，回転，反転，移動など，様々な変換を考える．この変換に関して，重要な物理量や密度行列は不変性など好ましい性質を満たすことが多い．このような性質を用いた物理量や密度行列の記述のためには，これらの変換に関する数学的理論を整理する必要がある．

一般に，変換 g_1 と異なる変換 g_2 が与えられたとき，変換 g_1 を施した後に，変換 g_2 を施すと，これは1つの変換を表すと考えることができる．すなわち，変換 g_1 と変換 g_2 を合成した変換が存在する．さらに，変換 g_1 が可逆な変換であるとすると，その定義から逆変換が存在する．このように，可逆な変換の集合を G とすると，G は以下の数学的な性質を満たすと考えられる．

集合 G に対して，任意の2つの元 $g_1, g_2 \in G$ に対して以下の条件を満たす積 $g_1 g_2$ が定義される．

結合律　任意の3つの元 $g_1, g_2, g_3 \in G$ に対して $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ が成り立つ．

単位元　次の条件を満たす G の要素 e が存在する．全ての $g \in G$ に対して，$eg = ge = g$ を満たす．（このような元を単位元とよぶ．これは，何も変換を施さないという変換に対応する．）

逆元　任意の G の要素 g に対して，条件 $g^{-1} g = g g^{-1} = e$ を満たす G の要

素 g^{-1} が存在する．（このような元を g の逆元とよぶ．）

数学では，このような性質を満たす集合 G を**群**とよび，様々な成果の蓄積がある．群を正確に扱うためには，様々な数学的概念が必要となる．以下，必要となる数学的概念を準備する．

G の部分集合 H で単位元 e を含み，上記の積演算に関して閉じているものを**部分群**という．群 G の要素の数が有限であるとき G を**有限群**といい，要素の数を**位数**とよび $|G|$ と記す．有限群の例としては n 個の要素の置換からなる置換群 S_n などが挙げられる．G の部分集合 G' を考えたとき，G の全ての要素が G の部分集合 G' の要素の積で表されるとき，G' が G を**生成する**という．そして，有限個の要素からなる G を生成する部分集合が存在するとき，G を**有限生成群**という．

$g \in G$ について $g^n = e$ となる最小の自然数 n を g の**位数**という．$g \in G$ の位数は G の位数の約数である．そして，特に以下の交換律を満たす場合，**可換群**という．

交換律　任意の2つの元 $g_1, g_2 \in G$ に対して $g_1 g_2 = g_2 g_1$ が成り立つ．

例えば，ハミルトニアンが $H = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ で与えられていたとすると，このハミルトニアンによる時間発展 $e^{itH} = e^{it}|0\rangle\langle 0| + e^{-it}|1\rangle\langle 1|$ は単位円周 $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$ を用いて表すことができる．$e^{it_1 H} e^{it_2 H} = e^{i(t_1+t_2)H}$ であることから，単位円周は掛け算についての可換群になる．

また，その部分集合 $\mathrm{U}_k := \{e^{i2\pi j/k} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathrm{U}(1)$ の部分群となる．U_k の全ての元は $e^{i2\pi/k}$ の n 乗で表すことができるので，**巡回群**とよばれ，$e^{i2\pi/k}$ は**生成元**とよばれる．

さらに，注目する対象がある集合 Θ で記述されており，Θ 上の変換が群 G によって与えられているとする．すなわち，任意の G の元 g に対して，集合 Θ から集合 Θ への写像 $T(g)$ が定まり，以下の条件を満たすことになる．

群の作用　$T(g_1) \circ T(g_2) = T(g_1 g_2)$ かつ $T(e)$ は恒等写像である．

このとき，$T(g)$ は全単射となる．以下では，T を群 G の集合 Θ への**作用**とよぶことにする．このような状況は自然現象を扱う際にしばしば現れる．Θ

の部分集合 Θ' が以下の条件を満たすとき，Θ' を Θ の作用 T に関する不変部分集合という．

不変性　$T(g)\theta' \in \Theta', \forall g \in G, \forall \theta' \in \Theta'$.

したがって，Θ が不変な真部分集合を持つ場合は，Θ の全ての点は作用 T によって互いに移りあうわけでない．逆に，群 G の作用 T によって，1つの点が動く範囲が集合全体 Θ となる場合，すなわち，以下の推移律を満たす場合，作用 T は**推移的**であるという．

推移律　任意の2つの元 $\theta, \theta' \in \Theta$ に対して，$T(g)\theta = \theta'$ を満たす $g \in G$ が存在する．

集合 Θ に対して，作用 T が推移的である場合，集合 Θ のどの点も同じ構造を持っているため，集合 Θ は**等質空間**とよばれる．一般には作用が推移的であっても集合 Θ と G とは集合として同じではない．したがって，群 G から等質空間 Θ の構造を記述するためには，その差を埋める概念が必要である．

以下では，本質的に Θ と同じ構造を持つ等質空間を構成するところで，群 G から Θ の構造を与えるが，等質空間が同じであるという意味を正確に定義する必要がある．2つの集合 Θ_1, Θ_2 への作用 T_1, T_2 が存在して，以下の条件 (2.1) を満たす Θ_1 から Θ_2 への写像 T_3 が存在するとき，2つの作用 T_1, T_2 は**同型**という．特に，作用が推移的である場合は，$\Theta_1 \cong \Theta_2$ と記す．

$$T_3 \circ T_1(g) = T_2(g) \circ T_3 \tag{2.1}$$

次に，Θ の元 θ_0 に対して，G の部分集合 $\{g \in G \,|\, T(g)\theta_0 = \theta_0\}$ は部分群となることが示せる．この部分群の作用は θ_0 を動かさないことから，θ_0 の**固定化群**という．実は，群 G と固定化群 H から等質空間 Θ を与えることが出来る．

以下では，$g \in G$ に対して，G の部分集合 $[g] := gH$ を部分群 H についての**剰余類**とよぶことにする．なお，一般に，G の部分集合 B に対して，部分集合 $gB := \{gh \,|\, h \in B\}$, $Bg := \{hg \,|\, h \in B\}$ が定義される．そして，剰余類全体の集合を $G/H = \{gH \,|\, g \in G\}$ と書き，**商空間**とよび，G/H が有限集合である場合は，その要素の数を $|G : H|$ と記し，H の G における**指数**とよぶ．そして，写像 $g \mapsto gH$ を（剰余 G/H に関する）**射影**とよぶことにする．

すると，G/H に対して自然に $g' \in G$ の作用 $gH \mapsto (g'g)H$ を定義することができる．そして，H が Θ への作用 T の θ_0 の固定化群である場合，Θ と G/H は同型な等質空間となる．なお，固定化群 H は θ_0 のとり方に依存するが，異なる θ_0 に対して定義した G/H は互いに同型な等質空間となる．

次に，群 G の要素 g の G 自身に対する作用 $g' \mapsto gg'g^{-1}$ を定義する．この作用の元で，部分群 H が不変であるとき，H が**不変部分群**（または**正規部分群**）であるという．例えば，部分集合 $M \subset G$ に対して，部分集合 $C_G(M) := \{h \in G \,|\, gh = hg,\ \forall g \in M\}$ は G の部分群となり，M の**中心化群**とよばれる．特に，$C_G(G)$ は G の可換な正規部分群となり，$C(G)$ と記し，G の**中心**とよぶ．中心 $C(G)$ は可換群であるので $C(G)$ の部分群も正規部分群となる．部分集合 $M \subset G$ に対して，部分集合 $N_G(M) := \{g \in G \,|\, gM = Mg\}$ は G の部分群となり，M の**正規化群**とよばれる．特に，M が G の部分群である場合は，$N_G(M)$ は M の正規部分群となる．そして，G の要素 a に対して $a^G := \{gag^{-1} \,|\, g \in G\}$ は a を含む G の**共役類**という．例えば，$a \in C(G)$ を含む共役類は $\{a\}$ となる．

正規部分群 H に対して，商空間 G/H は積 $gH \cdot g'H := (gg')H$ に関して群となり**剰余群**（**商群**）とよばれる．中心 $C(G)$ による剰余群を**指数群**とよぶ．群 G_1 から群 G_2 への写像 f が任意の $g_1, g_2 \in G_1$ に対して，条件 $f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2)$ を満たす場合**準同型**という．さらに，f が全単射の場合，f は**同型**であるという．群 G_1 から群 G_2 への同型写像が存在する場合，群 G_1 と群 G_2 は同型といい，$G_1 \cong G_2$ と記す．例えば，$\mathbb{R}$ の加法についての部分群 $\mathbb{Z}$ は正規部分群であり，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は $\mathrm{U}(1)$ と同型である．同じく $\mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ は巡回群 U_k と同型である．そのため，以下では $\mathbb{Z}_k$ についても巡回群とよぶ．特に，群 $G_1 = G_2$ のとき，f は**自己同型**という．群 G_1 の群 G_2 への作用 T が与えられたとき，任意の $g \in G_1$ について，$T(g)$ が G_2 の自己同型となるとき，T は群 G_1 の群 G_2 への**自己同型作用**とよぶ．なお，準同型写像 f に対してその**核** $\mathrm{Ker}\, f$ を $f^{-1}\{e\}$ で与えると，$\mathrm{Ker}\, f$ は G_1 の正規部分群になる．そして，$G_1/\mathrm{Ker}\, f \cong G_2$ となる（準同型定理）．

群 G が正規部分群を持つとき，正規部分群の構造を解析することで，群 G の構造が解析できることがある．$\{e\}$ と G 以外に正規部分群を持たない場合，群 G を**単純**とよぶことにすると，一般の群の構造の解析は，単純群の構造の解析に帰着できることになる．例えば，群 G に対して，集合 $\{g^{-1}h^{-1}gh \,|\, g, h \in G\}$

から生成される G の部分群 $[G,G]$ は G の正規部分群となり，G の**交換子群**とよばれる．

補題 2.1.1　G の部分群 H について以下は同値である．

(1)　H は正規部分群であり，G/H は可換群である．

(2)　$[G,G] \subset H$.

証明.　**(1)⇒(2)** の証明：H が条件 **(1)** を満たすとする．$a,b \in G$ について，$[a][b] = [b][a]$ となるから，$[a]^{-1}[b]^{-1}[a][b]$ が単位元となる．この事実は $a^{-1}b^{-1}ab \in H$ を意味する．よって，**(2)** を得た．

(2)⇒(1) の証明：H が条件 **(2)** を満たすとする．$c \in H$, $d \in G$ について，$d^{-1}cd = cc^{-1}d^{-1}cd \in c[G,G] \subset H$ となるから H は正規部分群である．さらに，$a,b \in G$ について，$ab = baa^{-1}b^{-1}ab$ であり，$a^{-1}b^{-1}ab \in [G,G] \subset H$ であるため，$[a][b] = [b][a]$ となる．　□

演習問題 1　G の部分集合 $\{g \in G \,|\, T(g)\theta_0 = \theta_0\}$ は部分群となることを示せ．

演習問題 2　Θ が群 G に関する等質空間であるとき，固定化群を H とすると，G/H は Θ と同型な等質空間であることを示せ．

演習問題 3　$[G,G]$ が G の正規部分群となることを示せ．

2.2　群の拡大

2.2.1　一般の群の拡大

2つの異なる変換の集まりが与えられたとき，これらの変換を組み合わせた変換について考えることが多い．もし，これら2種類の変換が完全に独立であれば，極めて話が簡単である．しかし，一般には，この2種の変換が互いに影響を及ぼしあうことがあり，そのような場合，これらの変換の組み合わせの集合を記述するのは大変厄介である．そのような複雑な状況を記述するのが，群の拡大という概念である．

2つの異なる群 H と K が与えられたとき，直積集合 $H \cdot K$ に対して積 $(h,k)(h',k') := (hh',kk')$ を定義すると，直積集合 $H \cdot K$ は群となる．この

積の下での群を H と K の**直積（群）**といい，$H \times K$ と記す．（本書では，集合としての直積は $H \cdot K$ で表し，群としての直積は $H \times K$ で表す．）これは，H と K に対応する2つの変換が完全に独立である場合である．

次に，群 K による変換が，群 H へ作用を施してしまう場合を考えよう．このような状況を扱うために，群 K の群 H への自己同型作用 T を与える．この場合，集合 $H \cdot K$ に対して自己同型作用 T の構造を反映した積が以下のように定義できる．

$$(h, k)(h', k') := (hT(k)(h'), kk'). \tag{2.2}$$

この積は直積群の積とは異なるので，この積の下での群を H と K の**半直積**といい，$H \rtimes K$ と記す．$h \in H, k \in K$ をそれぞれ，$(h, e), (e, k)$ と同一視すると，

$$hk = (h, k), \quad khk^{-1} = T(k)(h) \tag{2.3}$$

が成り立つ．さらに，H, K をそれぞれ，部分集合 $\{(h, e)\}_{h \in H}$，$\{(e, k)\}_{k \in K}$ と同一視すると，H は $H \rtimes K$ の正規部分群となり，K は $H \rtimes K$ の部分群となる．

直積や半直積は，H を正規部分群として持ち，$G/H \cong K$ となる群 G を与える方法である．このような性質を満たす直積集合 $H \cdot K$ に対する群構造は，上述の直積や半直積に限られない．このような条件を満たす群 G は群 H の K による**拡大**という．特に，H が H の拡大である群 G の中心 $C(G)$ の部分群となる場合は後に重要な役割を果たすので，そのような拡大 G は群 H の K による**中心拡大**とよばれる．しかし，群の拡大は，常に直積や半直積で与えられるとは限らない．ここで定義された群の拡大を調べることで，群 H と群 K に対応する変換の集合があり，これらの組み合わせの変換の集合に対応する群 G が，条件 $G/H \cong K$ を満たすことがわかっている場合に，どのような変換の集合があり得るかわかる．

以下，G を群 H の K による拡大とし，$k \in K$ に対し，代表元 $g_k \in G$ を選ぶと，剰余類は $g_k H$ となり，G は $g_{k_1} H \cup g_{k_2} H \cup \cdots \cup g_{k_n} H$ と書ける．今，任意の要素 $k \in K$ に対して，H の自己同型写像 $T(k)$ を

$$T(k)(h) := g_k h g_k^{-1}, \quad \forall k \in K, \forall h \in H \tag{2.4}$$

で与え，$k, k' \in K$ に対して，$\phi(k, k') \in H$ を

$$g_k g_{k'} = \phi(k, k') g_{kk'} \tag{2.5}$$

となるように定義する．すると，$h, h' \in H$ に対して，

$$(hg_k)(h'g_{k'}) = hg_k h' g_k^{-1} g_k g_{k'} = hT(k)(h')\phi(k, k') g_{kk'} \tag{2.6}$$

が成り立つ．したがって，G は群であるから，(2.4), (2.5) を組み合わせることで，

$$T(k)(T(k')(h)) = \phi(k, k')T(kk')(h)\phi(k, k')^{-1} \tag{2.7}$$

$$\phi(k, k')\phi(kk', k'') = T(k)(\phi(k', k''))\phi(k, k'k'') \tag{2.8}$$

であることが示せる．上記の 2 つの条件を満たす $\{T(k), \phi(k, k')\}$ を K の**因子団**とよぶ．なお，因子団は代表元 g_k のとり方に依存して決まる．上記の議論から，群の拡大から因子団が決まるが，逆に，(2.7), (2.8) を満たす因子団 $\{T(k), \phi(k, k')\}$ から集合 $H \cdot K$ に対して，hg_k を (h, k) に置き換えることで，(2.6) にしたがって，積を

$$(h, k)(h', k') := (hT(k)(h')\phi(k, k'), kk') \tag{2.9}$$

で定義すると群の条件を満たす [3, 定理 8.1]．よって，$\{T(k), \phi(k, k')\}$ が (2.7), (2.8) を満たすことと，各 $k \in K$ に対して，(2.4), (2.5) を満たす $g_k \in G$ が存在することが同値となる．特に，g_e として，e を選ぶと，$T(e)$ は恒等写像となり，$\phi(k, e) = \phi(e, k) = e$ が成り立つ．このような因子団を**正規化因子団**とよぶ．

2.2.2 可換群の中心拡大

後の節で，可換群の中心拡大が極めて重要な役割を果たすので，そのような拡大についてここで整理しておく．H が可換群であるとき，因子団 $\{T(k), \phi(k, k')\}$ が与える群 H の K による拡大が中心拡大であるための必要十分条件は，任意の $k \in K$ に対して $T(k)$ が恒等写像であることである．したがって，H が可換群である場合の，中心拡大の因子団を与えるには，以下の条件を満たす $\{\phi(k, k')\} \subset H$ を与えれば十分である．

$$\phi(k, k'k'')\phi(k', k'') = \phi(k, k')\phi(kk', k''). \tag{2.10}$$

この条件は $k \in K$ に対して，(2.5) を満たす $g_k \in G$ が存在することと同値である．そして，積は単純化でき，$(h,k)(h',k') = (hh'\phi(k,k'), kk')$ で与えられる．本書では，主に H が可換群である場合の，中心拡大のみを扱うので，以下では，(2.10) または (2.5) を満たす $\{\phi(k,k')\} \subset H$ を**因子団**とよぶことにする．特に，$\phi(k,e) = \phi(e,k) = e$ を満たすとき正規化因子団となる．

そして，2つの因子団 $\{\phi(k,k')\}$ と $\{\phi'(k,k')\}$ に対して，$\{h_k\}_{k\in K} \subset H$ が存在して，$\phi'(k,k') = h_k h_{k'} h_{kk'}^{-1} \phi(k,k')$ を満たすとき，2つの因子団は同値という．この同値性の下で2つの因子団 $\{\phi_1(k,k')\}$ と $\{\phi_2(k,k')\}$ に対して，$\{\phi_1(k,k')\} \cdot \{\phi_2(k,k')\} = \{\phi_1(k,k')\phi_2(k,k')\}$ で積を定義する．全ての $k, k' \in K$ に対して，$\phi(k,k') = e$ となる因子団を $\{e\}$ と表す．$\{e\}$ に対応する中心拡大は，H と K の直積群に他ならない．すると，可換群 H の群 K による因子団の集合は上記の積について，$\{e\}$ を単位元とする可換群となる．この因子団の集合からなる可換群は H の K による**拡大の群**といい，$H(K:H)$ と記す．なお，(2.5) より，$\{\phi'(k,k')\}$ は代表元を $\{g_k h_k\}_{k\in K}$ に取り替えた因子団を表すため，$\{\phi(k,k')\}$ と同じ中心拡大を表している．したがって，H の K による中心拡大の集合は集合 $H(K:H)$ と同一視できる．

定理 2.2.1　有限可換群 H の有限群 K による拡大の群 $H(K:H)$ の元の位数は，H の位数と K の位数の公約数となる．K の位数が無限のときは，$H(K:H)$ の位数は H の位数に等しい [3, 定理8.5]．特に，H の位数と K の位数が互いに素である場合は，H の K による中心拡大は直積群に限られる．

例えば，U(1) の有限群 U_k による拡大の群 $H(\mathrm{U}_k : \mathrm{U}(1))$ は U_k と同型になる．

演習問題 4　半直積 $H \rtimes K$ について，(2.3) を示せ．

演習問題 5　半直積 $H \rtimes K$ について，H は正規部分群となることを示せ．

演習問題 6　集合 $H \cdot K$ に対して積を (2.9) で与えたとき，$H \cdot K$ は群となることを示せ．

演習問題 7　H が可換群である場合，因子団 $\{T(k), \phi(k,k')\}$ が中心拡大を与えるための必要十分条件は任意の $k \in K$ に対して，$T(k)$ が恒等写像であることを示せ．

2.2.3 中心拡大の具体例

以下では，中心拡大の具体例を挙げる．

例 2.2.2 (巡回群 $\mathbb{Z}_{p^n}$)　p を素数とし，巡回群 $\mathbb{Z}_{p^n}$ に注目する．このとき，$m < n$ について，$\mathbb{Z}_{p^n}$ の部分群 $\{kp^m \mid kp^m \in \mathbb{Z}_p^n\}$ は $\mathbb{Z}_{p^{n-m}}$ と同型な正規部分群となる．このとき，$\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z}_{p^{n-m}}$ は $\mathbb{Z}_{p^m}$ と同型となる．したがって，$\mathbb{Z}_{p^n}$ は $\mathbb{Z}_{p^{n-m}}$ の $\mathbb{Z}_{p^m}$ による中心拡大である．$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{p^m}$ に対して，因子団は

$$\phi(k_1, k_2) = \begin{cases} 0 & k_1 + k_2 \geq p^m \text{のとき} \\ 1 & k_1 + k_2 < p^m \text{のとき} \end{cases} \tag{2.11}$$

で与えられる．したがって，$\mathbb{Z}_{p^n}$ に対して，正規部分群の列 $\{0\} \subset \mathbb{Z}_{p^1} \subset \mathbb{Z}_{p^2} \subset \cdots \subset \mathbb{Z}_{p^n}$ が構成できる．

例 2.2.3 ($\mathbb{Z}_d$ 上の 1 自由度離散 Heisenberg 群)　d が奇数のとき $\mathbb{Z}_d^2 \cdot \mathrm{U}_d$ に積演算 $(s, t, \omega_d^n) \cdot (s', t', \omega_d^{n'}) := (s + s', t + t', \omega_d^{n+n'+st'-ts'})$ を与えると群となる．ここで，ω_d は 1 の d 乗根である．この群を $\mathbb{Z}_d$ 上の 1 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2, \mathbb{Z}_d)$ と記す．部分集合 $\{(0, 0, \omega_d^n)\}$ は正規部分群となり，U_d と同型なので，以下 U_d と記す．$\mathrm{H}(2, \mathbb{Z}_d)/\mathrm{U}_d$ は $\mathbb{Z}_d^2$ となる．$(s, t) \in \mathbb{Z}_d^2$ の代表元を $(s, t, 1)$ とすると，$(s, t, 1) \cdot (s', t', 1) = (s + s', t + t', \omega_d^{st'-ts'})$ となる．すなわち，$\mathrm{H}(2, \mathbb{Z}_d)$ は U_d の $\mathbb{Z}_d^2$ による中心拡大となり，その因子団は $\phi((s, t, 1), (s', t', 1)) = \omega_d^{st'-ts'}$ となる．$\mathrm{H}(2, \mathbb{Z}_d)$ の中心は U_d となる．

d が偶数のとき $\mathbb{Z}_d^2 \cdot \mathrm{U}_{2d}$ に積演算 $(s, t, \omega_{2d}^n) \cdot (s', t', \omega_{2d}^{n'}) := (s + s', t + t', \omega_{2d}^{n+n'+st'-ts'})$ を与えると群となる．この群を $\mathbb{Z}_d$ 上の 1 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2, \mathbb{Z}_d)$ と記す．この群についても，奇数の場合と同じように，U_{2d} が正規部分群となり，$\mathbb{Z}_d^2 \cong \mathrm{H}(2, \mathbb{Z}_d)/\mathrm{U}_{2d}$ となる．そして，$\mathrm{H}(2, \mathbb{Z}_d)$ は U_{2d} の $\mathbb{Z}_d^2$ による中心拡大となり，その因子団は同様に求めることができる．$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)$ の中心は U_{2d} となる．

例 2.2.4 ($\mathbb{Z}_d$ 上の多自由度離散 Heisenberg 群)　d が奇数のとき $\mathbb{Z}_d^{2r} \cdot \mathrm{U}_d$ に積演算 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \omega_d^n) \cdot (\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}', \omega_d^{n'}) := (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}', \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}', \omega_d^{n+n'+(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_{\mathbb{Z}}-(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_{\mathbb{Z}}})$ を与えると群となる．ここで，$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})_{\mathbb{Z}} := \sum_{j=1}^r s_j t_j$ とした．この群を $\mathbb{Z}_d$ 上の r 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)$ と記す．正規部分群 $\{(0, 0, \omega_d^n)\}$

を U_d と記すと，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)/\mathrm{U}_d$ は $\mathbb{Z}_d^{2r}$ となる．$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{Z}_d^{2r}$ の代表元を $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, 1)$ とすると，$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, 1) \cdot (\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}', 1) = (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}', \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}', \omega_d^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_\mathbb{Z} - (\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_\mathbb{Z}})$ となる．すなわち，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)$ は U_d の $\mathbb{Z}_d^{2r}$ による中心拡大となり，その因子団は $\phi((\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, 1), (\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}', 1)) = \omega_d^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_\mathbb{Z} - (\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_\mathbb{Z}}$ となる．さらに，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)$ の中心は U_d となる．

d が偶数のとき $\mathbb{Z}_d^{2r} \cdot \mathrm{U}_{2d}$ に積演算 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \omega_{2d}^n) \cdot (\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}', \omega_{2d}^{n'}) := (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}', \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}', \omega_{2d}^{n+n'+(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_\mathbb{Z} - (\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_\mathbb{Z}})$ を与えると群となる．この群を $\mathbb{Z}_d$ 上の r 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)$ と記す．この群についても，奇数の場合と同じように，U_{2d} が正規部分群となり，$\mathbb{Z}_d^{2r} \cong \mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)/\mathrm{U}_{2d}$ となる．そして，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)$ は U_{2d} の $\mathbb{Z}_d^{2r}$ による中心拡大となり，その因子団は同様に求めることができる．さらに，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{Z}_d)$ の中心は U_{2d} となる．

例 2.2.5（$\mathbb{F}_q$ 上の 1 自由度離散 Heisenberg 群）　q を素数 p の冪乗 p^n とし，$\mathbb{F}_q$ を有限体 $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の n 次の代数拡大とする．p が奇数のとき $\mathbb{F}_q^2 \cdot \mathrm{U}_p$ に積演算 $(s, t, \omega_p^n) \cdot (s', t', \omega_p^{n'}) := (s + s', t + t', \omega_p^{n+n'+tr(st'-ts')})$ を与えると群となる．ここで，$\mathbb{F}_q$ をベクトル空間 $\mathbb{F}_p^m$ と見なしたときに掛け算 $x \mapsto zx$ を行列表示したものを M_z としたとき，$\mathrm{Tr}\, M_z$ を trz と表した．この群を $\mathbb{F}_q$ 上の 1 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)$ と記す．部分集合 $\{(0, 0, \omega_d^n)\}$ は正規部分群となり，U_p と同型なので，以下 U_p と記す．$\mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)/\mathrm{U}_p$ は $\mathbb{F}_q^2$ となる．$(s, t) \in \mathbb{F}_q^2$ の代表元を $(s, t, 1)$ とすると，$(s, t, 1) \cdot (s', t', 1) = (s+s', t+t', \omega_p^{tr(st'-ts')})$ となる．すなわち，$\mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)$ は U_p の $\mathbb{F}_q^2$ による中心拡大となり，その因子団は $\phi((s, t, 1), (s', t', 1)) = \omega_p^{tr(st'-ts')}$ となる．$\mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)$ の中心は U_p となる．

$p = 2$ のとき $\mathbb{F}_q^2 \cdot \mathrm{U}_4$ に積演算 $(s, t, \omega_4^n) \cdot (s', t', \omega_4^{n'}) := (s + s', t + t', \omega_4^{n+n'+tr(st'-ts')})$ を与えると群となる．この群を $\mathbb{F}_q$ 上の 1 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)$ と記す．この群についても，奇数の場合と同じように，U_4 が正規部分群となり，$\mathbb{F}_q^2 \cong \mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)/\mathrm{U}_4$ となる．そして，$\mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)$ は U_4 の $\mathbb{F}_q^2$ による中心拡大となり，その因子団は同様に求めることができる．$\mathrm{H}(2, \mathbb{F}_q)$ の中心は U_4 となる．

例 2.2.6（$\mathbb{F}_q$ 上の多自由度離散 Heisenberg 群）　p が奇数のとき $\mathbb{F}_q^{2r} \cdot \mathrm{U}_p$ に積演算 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \omega_p^n) \cdot (\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}', \omega_p^{n'}) := (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}', \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}', \omega_p^{n+n'+(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_\mathbb{F} - (\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_\mathbb{F}})$ を与

えると群となる．ここで，$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})_{\mathbb{F}} := \sum_{j=1}^{r} tr(s_j t_j)$ とした．この群を $\mathbb{F}_q$ 上の r 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ と記す．正規部分群 $\{(0,0,\omega_p^n)\}$ を U_p と記す．$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_p)/\mathrm{U}_p$ は $\mathbb{F}_p^{2r}$ となる．$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \in \mathbb{F}_p^{2r}$ の代表元を $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},1)$ とすると，$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},1)\cdot(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}',1) = (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}',\omega_p^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_{\mathbb{F}}-(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_{\mathbb{F}}})$ となり，$\phi((\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},1),(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}',1)) = \omega_p^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_{\mathbb{F}}-(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_{\mathbb{F}}}$ となる．すなわち，$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ は U_p の $\mathbb{F}_q^{2r}$ による中心拡大となり，その因子団は $\phi((s,t,1),(s',t',1)) = \omega_p^{tr(st'-ts')}$ となる．$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ の中心は U_p となる．

$p=2$ のとき $\mathbb{F}_q^{2r}\cdot\mathrm{U}_4$ に積演算 $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\omega_4^n)\cdot(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}',\omega_4^{n'}) := (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}',\omega_4^{n+n'+(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_{\mathbb{F}}-(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}')_{\mathbb{F}}})$ を与えると群となる．この群を $\mathbb{F}_q$ 上の r 自由度離散 Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ と記す．この群についても，奇数の場合と同じように，U_4 が正規部分群となり，$\mathbb{F}_q^{2r}\cong\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)/\mathrm{U}_4$ となる．そして，$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ は U_4 の $\mathbb{F}_q^{2r}$ による中心拡大となり，その因子団は同様に求められることができる．$\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ の中心は U_4 となる．

2.3 群の表現と射影表現

2.3.1 表現と射影表現の定義

次に，与えられた群 G が量子系 $\mathcal{H}$ に対して，どのような変換を引き起こすか考える．そのために，有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への線型写像の集合を $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ とし，$\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ の要素の中で逆写像を持つものの集合を $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ と記す．$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ は合成写像を考えることで，群の構造を持ち，$\mathcal{H}$ 上の一般線型群とよばれる．特に，行列式が 1 となる行列の集合は特殊線型群とよばれ，$\mathrm{SL}(\mathcal{H})$ と記す．また，$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の要素で，内積を保存するものをユニタリ写像とよぶ．そして，そのようなユニタリ写像の集合を $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ と記し，その部分群 $\mathrm{U}(\mathcal{H})\cap\mathrm{SL}(\mathcal{H})$ を $\mathrm{SU}(\mathcal{H})$ と記す．集合 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ $(\mathrm{SU}(\mathcal{H}))$ は合成写像を考えることで，群の構造を持つので，$\mathcal{H}$ 上の（特殊）ユニタリ群とよばれる．

群 G から群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ への準同型写像 f を G の $\mathcal{H}$ への**表現**という．特に，$\mathcal{H}$ への表現 f の像が $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ に含まれているとき，**ユニタリ表現**とよぶ．量子論で重要なのはユニタリ表現である．

群 G のユニタリ表現 f が与えられたとすると，群の要素 $g\in G$ による，密

度行列 ρ に対する変換 $\rho \mapsto \mathsf{f}(g)\rho\mathsf{f}(g)^\dagger$ が決まる．これは，群 G による密度行列全体に対する作用を与えている．しかし，量子論で現れる群 G による意味のある変換は，必ずしもユニタリ表現 f で与えられるとは限らない．群 G から群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ への写像 f が以下を満たすとき f を**射影的表現**とよぶ．任意の $g, g' \in G$ に対して，適切に $\theta(g,g') \in \mathbb{R}$ を選ぶと以下が成立する．

$$\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g') = e^{i\theta(g,g')}\mathsf{f}(gg'). \tag{2.12}$$

特に，f の像が $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ に含まれる場合，射影的ユニタリ表現とよぶ．一見すると，因子 $e^{i\theta(g,g')}$ が存在するため，物理的な対称性が成り立たないように思えるが，この因子は密度行列に対する作用には直接現れない．そのため，f が表現ではなく，射影的ユニタリ表現であった場合でも $\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g')\rho(\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g'))^\dagger = \mathsf{f}(gg')\rho\mathsf{f}(gg')^\dagger$ が成り立つ．よって，密度行列 ρ への作用として考えると，因子 $e^{i\theta(g,g')}$ が現れない．一方，ユニタリでない表現や射影的表現は，この密度行列を密度行列に移さない．したがって，量子系における，群による変換を記述するのは，射影的ユニタリ表現となる（もちろん，これにはユニタリ表現は含まれる）．群の性質などから，ユニタリ表現や射影的ユニタリ表現は一定のタイプのものに制限されるので，このような変換の存在から，量子系の状態に様々な制約が得られ，解析が容易になることが多い．本書では，群の性質などによるこの種の制限について，詳しく解説する．

なお，量子論で直接意味のあるのは，ユニタリ表現や射影的ユニタリ表現であるが，知りたいユニタリ表現や射影的ユニタリ表現について調べるために，ユニタリでない表現や射影的表現についての知識が有効である場合がある．そのため，本書ではそのようなタイプの表現や射影的表現についても扱うこととする．

また，表現は単純に物理的な変換の形を与えるだけではない．実は，密度行列や物理量の形も表現から決まることがある．例えば，物理量はしばしば，ある群の要素 $g \in G$ と（射影的）ユニタリ表現 f を用いて $-i\log\mathsf{f}(g)$ や G の1次元の部分群 $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を用いて，$-i\lim_{t\to 0}\frac{\mathsf{f}(g_t)-I}{t}$ で与えられることがある．また，密度行列 ρ は4.4.1項で説明するように，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ のユニタリではない（射影的）表現 f と $g \in G$ を用いて $\mathsf{f}(g)$ で与えられる．量子論では，物理量や密度行列が行列として表したとき，どのような形になるか重要であることが多い．上記の場合，群の性質から，物理量や密度行列を行列として表した場

合に，どのような形になるか，群の性質からわかることが多い．このように，ユニタリではない（射影的）表現 f も重要となる場合もある．

一方，$\mathcal{H}$ が無限次元の Hilbert 空間の場合は，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素は定義でき，集合 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ は定義できる．したがって，有限次元の場合と同様に，ユニタリ表現および射影的ユニタリ表現を定義する．しかし，無限次元の場合にはユニタリではない表現は定義はできるが，有益ではないので，ユニタリではない表現または射影的表現は有限次元の場合にのみ扱うこととする．すなわち，以下では，$\mathcal{H}$ が有限次元の場合には，表現または射影的表現は，必ずしもユニタリとは限らないとし，無限次元の場合には，ユニタリの場合に限るとする．

以下，表現や射影的表現を扱うために必要となる数学的概念についてまとめる．表現 f が準同型写像として単射であるとき，表現 f は**忠実**であるという．これは，群 G の中に全く系を変化させない無駄な変換が単位元を除いて存在しないことを意味する．そして，$\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ への表現 f_1 と f_2 が与えられ，以下を満たす $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への可逆な線型写像 A が存在するとき，2 つの表現 f_1 と f_2 は互いに**同型**であるという．

$$A\mathsf{f}_1(g) = \mathsf{f}_2(g)A, \quad \forall g \in G. \tag{2.13}$$

このとき，A は（G の表現についての）**同型写像**とよばれる．群 G が有限群である場合，2.8 節で述べるように，任意の表現はユニタリ表現と同型である．また，2 つのユニタリ表現の同型性は (2.13) を満たすユニタリ作用素 A が存在によって定義される．同型の概念は射影的表現についても以下のように拡張できる．2 つの射影的表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ について (2.13) を満たす線型写像 A が存在するとき，2 つの射影的表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ は**同型**という．(2.13) を満たすユニタリ作用素 A が存在するとき，2 つの射影的ユニタリ表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ は同型という．

群 G の $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 上の表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ が与えられたとき，以下で与える直和空間 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ への表現 $\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2$ を f_1 と f_2 の**直和表現**といい，テンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ への表現 $\mathsf{f}_1 \otimes \mathsf{f}_2$ を f_1 と f_2 の**テンソル積表現**という．

$$\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2(g) := \mathsf{f}_1(g) \oplus \mathsf{f}_2(g), \quad \mathsf{f}_1 \otimes \mathsf{f}_2(g) := \mathsf{f}_1(g) \otimes \mathsf{f}_2(g). \tag{2.14}$$

$\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ が射影的表現のときは，テンソル積射影表現 $\mathsf{f}_1 \otimes \mathsf{f}_2$ は同じように定義できるが，直和射影表現 $\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2$ については，定義できる場合とできない場合がある．これについては 2.4 節の最後で述べる．

もし直和空間 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ 上のある表現 f が直和表現 $\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2$ で与えられているとすると，その取り扱いは以下のように容易になる．一般には，$\mathsf{f}(g)$ を行列表示した場合，その全ての行列成分を考える必要がある．しかし，上記のような直和表現である場合，その定義から，空間 $\mathcal{H}_1$ から空間 $\mathcal{H}_2$ に移る成分は存在しない．同様の，その逆の成分も存在しない．例えば，空間 $\mathcal{H}_1$ と空間 $\mathcal{H}_2$ の次元を d_1, d_2 とすると，一般には，$(d_1+d_2)^2$ 個の成分を考える必要があるが，(2.15) で扱うように $2d_1d_2$ 成分が 0 であることがわかるので，残りの $d_1^2+d_2^2$ 個の成分についてのみ考えれば十分である．しかも，残りの成分について，d_1^2 個の成分と d_2^2 個の成分を個別に扱えばよいので，その取り扱いは，直和表現でない場合と比較して格段に容易である．

$$\mathsf{f}(g) = \begin{pmatrix} \mathsf{f}_1(g) & 0 \\ 0 & \mathsf{f}_2(g) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

このように，次元の高い量子系での取り扱いは，いかに直和表現に帰着できるかがポイントである．

群 G の $\mathcal{H}$ 上の（射影的）表現 f に対して，$\mathcal{H}$ の $\{0\}$ または $\mathcal{H}$ でない以下の不変性条件を満たす部分空間 $\mathcal{K}$ が存在する場合，（射影的）表現 f を**可約**という．

不変性　$\mathsf{f}(g)u \in \mathcal{K}, \quad \forall u \in \mathcal{K}, \forall g \in G.$

逆に，不変性を満たす非自明な部分空間 $\mathcal{K}$ が存在しない場合，f は**既約**という．また，不変性を満たす非自明な2つの部分空間 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ が存在し，$\mathcal{H} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ となる，すなわち，それぞれの部分空間への表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ の直和表現 $\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2$ として与えられる場合，f は**分解可能**という．特に，（射影的）ユニタリ表現の場合，$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ は互いに直交する．逆に，f が分解可能でない場合，**分解不可能**という．

一般には，既約な（射影的）表現（ユニタリ表現）f は分解不可能であるが，その逆について以下の補題が成り立つ．

補題 2.3.1　分解不可能な（射影的）ユニタリ表現 f は既約である．すなわち，可約な（射影的）ユニタリ表現 f は分解可能となり，部分空間への表現の直和表現で与えられる．

証明. 対偶を示す．$\mathcal{H}$ への群 G の（射影的）ユニタリ表現 f は可約とする．すると，$\mathcal{H}$ の G の作用について自明でない不変部分空間 $\mathcal{K}$ が存在する．このとき，以下に示すように $\mathcal{K}$ の直交補空間 $\mathcal{K}^{\perp}$ も G の作用について不変部分空間となり，（射影的）ユニタリ表現 f は分解可能となる．

任意の $v_1 \in \mathcal{K}$, $v_2 \in \mathcal{K}^{\perp}$ について，$\|\mathsf{f}(g)(v_1+v_2)\|^2 = \|v_1+v_2\|^2$ より，$\langle \mathsf{f}(g)v_1, \mathsf{f}(g)v_2 \rangle = 0$ となる．$\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g^{-1}) = I$ より（射影表現のときは右辺は $e^{i\theta(g,g^{-1})}I$ となる），$\mathsf{f}(g)$ による $\mathcal{K}$ の像は $\mathcal{K}$ となる．よって，$\mathsf{f}(g)v_2$ は $\mathcal{K}$ の直交補空間 $\mathcal{K}^{\perp}$ に含まれる．したがって，$\mathcal{K}^{\perp}$ は G の作用について不変部分空間となる． □

しかし，一般のユニタリでない表現には，分解不可能であるが，既約でない例が存在する．例えば，実数の加法についての群 $\mathbb{R}$ の以下の $\mathbb{C}^2$ への表現は分解不可能であるが可約である．

$$\mathsf{f}(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

$\mathcal{H}$ 上の（射影的）表現 f が，（射影的）既約表現の直和表現で与えられるとき，f は**完全可約**という．したがって，$\mathcal{H}$ が有限次元のとき，補題2.3.1より，（射影的）ユニタリ表現 f は完全可約である．完全可約の場合，既約表現のときの行列成分がわかれば，表現全体の行列成分はそれらの組み合わせでわかる．そのため，有限次元での（射影的）ユニタリ表現を調べるには，既約表現さえわかれば十分である．

以下，同型な表現を同一視した群 G の既約なユニタリ表現を表す添え字の集合を $\hat{G}$ で表し，$\lambda \in \hat{G}$ に対して，その表現空間を $\mathcal{U}_\lambda(G)$ とし，その表現を f_λ で表すとする．特に，有限次元の表現に対応するものの集合を $\hat{G}_{\mathrm{f}}$ で表す．表現空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)$ の次元を d_λ とし，その正規直交基底を $\{|\lambda; j\rangle\}_{j=1}^{d_\lambda}$ と書くことにする．混乱を生じない場合は $\mathcal{U}_\lambda(G)$ を $\mathcal{U}_\lambda$ と略記することとする．

したがって，ユニタリ表現 f が完全可約である場合，表現空間 $\mathcal{H}$ は以下の同型を持つ．

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathcal{U}_\lambda(G) \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}. \tag{2.17}$$

ここで，n_λ は $\mathcal{H}$ に既約な表現空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)$ が含まれる重複度である．このとき，f を $\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} n_\lambda \mathsf{f}_\lambda$ と表す．以下では (2.17) の右辺を表現の**既約分解**とよぶことにする．上記の既約分解が与えられたとき，重複度を表す空間 $\mathbb{C}^{n_\lambda}$ の正規直交基底を $\{|j\rangle\}_{j=1}^{n_\lambda}$ と記すことにする．そして，$|\lambda;j\rangle\otimes|j'\rangle$ を $|\lambda;j;j'\rangle$ と記すことにする．

さらに，（ユニタリ）表現 f の表現空間を制限したことで得られる（ユニタリ）表現を f の**部分（ユニタリ）表現**とよぶ．そして，有限次元表現 f に対して，関数 $\chi_\mathsf{f}(g) := \mathrm{Tr}\,\mathsf{f}(g)$ を**指標**とよぶことにする．同じ共役類に含まれる場合，その指標は同じになる．すなわち，任意の表現について

$$\chi_\mathsf{f}(g') = \chi_\mathsf{f}(g^{-1}g'g), \quad \forall g, g' \in G \tag{2.18}$$

が成り立つ．特に，既約ユニタリ表現 f_λ の指標は**既約指標**とよばれ χ_λ と記す．

なお，上記の議論から既約分解は表現空間の直和分解 $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ を与えるため，E_i を $\mathcal{H}_i$ への射影をすると，$\{E_i\}$ は射影測定を1つ与えることになる．密度行列 ρ がここで与えられた群 G の完全可約な表現 f と $g\in G$ を用いて，$\mathsf{f}(g)$ と表されるとする．すると，状態が ρ で与えられ $\{E_i\}$ に対応する射影測定を行ったときに，測定値 i を得る確率は $\mathrm{Tr}\,\mathsf{f}(g)E_i$ で与えられるが，この確率は $\mathcal{H}_i$ への既約表現 f_i への指標 $\chi_{\mathsf{f}_i}(g)$ そのものである．このように，指標には重要な物理的意味がある．

2.3.2　Schur の補題

既約表現については以下の Schur の補題が成り立つ．

補題 2.3.2　f を有限次元空間 $\mathcal{H}$ 上の群 G （射影的）ユニタリ表現とする．このとき，以下の2つの条件は同値である．

(1)　（射影的）ユニタリ表現 f は既約である．

(2)　$\mathcal{H}$ 上の行列 A が任意の $g\in G$ について，

$$\mathsf{f}(g)A = A\mathsf{f}(g) \tag{2.19}$$

を満たすとき，定数 $c\in\mathbb{C}$ を用いて，$A = cI$ となる．

なお，Schur の補題（補題2.3.2）から中心 $C(G)$ の要素 g について $\mathsf{f}(g)$ は定数となる．

重要な物理量 A は条件式(2.19)を満たすことが多い．このような場合 A は表現 f に関して不変であるという．この場合，表現が既約であれば，補題2.3.2は物理量 A が確定した値となることを示している．

証明. (1) ⇒ (2) A は複素行列であるので固有値 c を持つ．したがって，$A-cI$ はKernel を持つ．この Kernel は表現に関して，不変部分空間になる．既約性から，Kernel は $\mathcal{H}$ と一致する．

f が（射影的）ユニタリ表現であるとする．(2) ⇒ (1) を示すために，その対偶を示す．(1) が成立しないとする．f が可約となり，補題2.3.1より，f は分解可能となるとすると，$\mathcal{H}$ の互いに直交する不変部分空間 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ を用いて，$\mathcal{H}$ は直和分解できる．すなわち，$\mathcal{H}=\mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}_2$ が成り立つ．よって，$\mathcal{K}_1$ 上で1であり，$\mathcal{K}_2$ 上で0となる行列を考えると(2.19)は成り立つが $A=cI$ は成り立たない．よって(2)が成立しない． □

なお補題2.3.2は無限次元空間 $\mathcal{H}$ 上の既約な（射影的）ユニタリ表現に拡張できる．(2) ⇒ (1) の証明は無限次元でもそのまま通用する．(1) ⇒ (2) は以下のように示せる．

証明. 初めに，A が自己共役作用素の場合を示す．このとき，$\mathsf{f}(g)A\mathsf{f}(g)^\dagger = A,\ \forall g\in G$ となる．ここで A のスペクトル分解を $\int E(d\lambda)$ とすると，$\mathsf{f}(g)$ はユニタリであるので，$\int \mathsf{f}(g)E(d\lambda)\mathsf{f}(g)^\dagger$ は $\mathsf{f}(g)A\mathsf{f}(g)^\dagger$ のスペクトル分解となる．したがって，任意の $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ に対して，$E([a,b]) = \mathsf{f}(g)E([a,b])\mathsf{f}(g)^\dagger$ が成り立つ．よって，$E([a,b])$ の値域は不変部分空間となる．既約性より，全ての $[a,b]$ に対して，この値域は $\mathcal{H}$ または $\{0\}$ と一致する．したがって A は定数作用素となる．A がユニタリまたはユニタリの定数倍である場合も，同様に，そのスペクトル分解を考えることで，A は定数作用素となる．

一方 A が自己共役でない場合，$A^\dagger A$ は自己共役になり，任意の $g\in G$ について，$\mathsf{f}(g^{-1})A^\dagger\mathsf{f}(g^{-1})^\dagger = A^\dagger$ を満たす．よって，g^{-1} を g に置き換えることにより，任意の $g\in G$ について，$\mathsf{f}(g)AA^\dagger\mathsf{f}(g)^\dagger = AA^\dagger$ を得る．よって，$AA^\dagger$ は自己共役であるので，$AA^\dagger$ は定数作用素となる．もし，A が Kernel を持つ

と，Kernel が不変部分空間となり，既約性から Kernel が $\mathcal{H}$ 全体と一致する．したがって，以下では A が Kernel を持たない場合のみ扱う．同様に，以下では $A^\dagger$ も Kernel を持たない場合のみ扱う．よって，A はユニタリの定数倍となる．ユニタリの定数倍の場合は，先に述べたように定数作用素となる．　□

指標 χ_{f} のサポート $\mathrm{supp}(\chi_{\mathsf{f}})$ を $\mathrm{supp}(\chi_{\mathsf{f}}) := \{g \in G \,|\, \chi_{\mathsf{f}}(g) \neq 0\}$ で定義する．すると，Schur の補題の応用として以下の補題が成り立つ．

補題 2.3.3　群 G の指数群 $G/C(G)$ が可換群とする．χ_{f} を既約指標とし，$g \neq e \in C(G)$ は $\mathsf{f}(g) \neq \mathsf{f}(e)$ を満たすとする．このとき，$\mathrm{supp}(\chi_{\mathsf{f}}) = C(G)$ となる．

証明.　補題2.1.1より，交換子群は $C(G)$ に含まれるので，$g \in G \setminus C(G)$ と任意の $g' \in G$ について $g'gg'^{-1}g^{-1} \in C(G)$ となる．g は $C(G)$ の要素でないので，$z := g'gg'^{-1}g^{-1} \neq e$ となる $g' \in G$ が存在する．Schur の補題より $\mathsf{f}(z)$ は定数 ω となる．また，仮定より $\omega \neq 1$ である．したがって，$\chi_{\mathsf{f}}(g) = \chi_{\mathsf{f}}(g'gg'^{-1}) = \chi_{\mathsf{f}}(zg) = \omega\chi_{\mathsf{f}}(g)$ となる．この式から $\chi_{\mathsf{f}}(g) = 0$ を得る．　□

補題2.3.3は以下のように一般化できる．

補題 2.3.4　群 G の指数群 $G/C(G)$ が可換群とする．χ_{f} を G の正規部分群 N の既約指標とする．$\mathsf{f}(g) \neq I$ となる $g \in C(G) \cap N$ は単位元に限られるとする．このとき，$\mathrm{supp}(\chi_{\mathsf{f}}) = C(N)$ となる．

証明.　補題2.1.1より，交換子群は $C(G)$ に含まれるので，$g \in N \setminus C(N)$ と任意の $g' \in G$ について $g'gg'^{-1}g^{-1} \in C(G) \cap N$ となる．g は $C(G)$ の要素でないので，$z := g'gg'^{-1}g^{-1} \neq e$ となる $g' \in G$ が存在する．$z \in N$ であるから，Schur の補題より $\mathsf{f}(z)$ は定数 $\omega \neq 1$ となり，補題2.3.3と同様にして題意を得る．　□

完全可約な場合，Schur の補題は以下のように一般化できる．

補題 2.3.5　群 G の（射影的）表現 f の空間 $\mathcal{H}$ の既約分解が (2.17) で与えられているとする．このとき，$\mathcal{H}$ 上の行列 A について以下の2つの条件は同

値である.

(1)　$\mathbb{C}^{n_\lambda}$ 上の行列 A_λ を用いて，A は以下のように書ける：

$$A = \bigoplus_\lambda I_\lambda \otimes A_\lambda. \tag{2.20}$$

ここで I_λ は $\mathcal{U}_\lambda$ 上の単位行列である.

(2)　任意の $g \in G$ について，

$$\mathsf{f}(g)A = A\mathsf{f}(g) \tag{2.21}$$

が成り立つ.

既約分解 (2.17) の中に，互いに同値な表現空間が含まれていない場合には，この補題の意味はわかりやすい．このとき，A が可換性条件 **(2)** を満たすとする．各既約空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)$ への射影を E_λ とすると，A は $\sum_\lambda a_\lambda E_\lambda$ と書ける．すなわち，既約空間上では，A は確定した値を持つ．しかし，既約分解 (2.17) の中に，互いに同値な表現空間が含まれている場合には，このような結論にならない.

証明.　**(1)⇒(2)** は明らかであるので，**(2)⇒(1)** のみ示す．初めに，$\mathcal{H}$ が1種類の既約表現からなる場合，すなわち，$\mathcal{H} = \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ の場合のみ示す．このとき，$u \otimes v \in \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ は $A(u \otimes v) = \sum_i u_i \otimes v_i$ とすると，条件 **(2)** と補題 2.3.2 より，u_i は u のスカラー倍となる．したがって，$A(u \otimes v)$ は $v' \in \mathbb{C}^{n_\lambda}$ を用いて，$u \otimes v'$ と書ける．すなわち，A は **(1)** を満たす.

次に，一般の場合について示す．この場合，$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ と書けるが，$\mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ への射影を P_λ とする．$\lambda \neq \lambda'$ について，$P_\lambda A P_{\lambda'}$ は任意の $g \in G$ について $P_\lambda A P_{\lambda'} \mathsf{f}(g) = \mathsf{f}(g) P_\lambda A P_{\lambda'}$ を満たす．しかしながら，$\mathcal{U}_\lambda$ と $\mathcal{U}_{\lambda'}$ は同型でないので，$P_\lambda A P_{\lambda'} = 0$ となる．よって，$\mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ 上の行列 A'_λ を用いて，A は $\bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} A_\lambda$ と書ける．A_λ に上記の議論を適用することで題意を得る.　□

2.3.3　直積群の表現

$\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ への群 G_1 と G_2 の表現 f_1 と f_2 が与えられたとする．このとき，群 G_1 は $\mathcal{H}_2$ に対して，群 G_2 は $\mathcal{H}_1$ に対して，何も変化を引き起こさないの

であれば，合成系であるテンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ への作用は，いかに与える直積群 $G_1 \times G_2$ の表現を考えるのが自然である．すなわち，直積群 $G_1 \times G_2$ のテンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ への（ユニタリ）表現 $\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$ を以下で定義する．

$$(\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2)(g_1, g_2) := \mathsf{f}_1(g_1) \otimes \mathsf{f}_2(g_2), \quad \forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2. \tag{2.22}$$

すると，指標について以下の公式を得る．

$$\chi_{\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2}(g_1, g_2) = \chi_{\mathsf{f}_1}(g_1)\chi_{\mathsf{f}_2}(g_2). \tag{2.23}$$

補題 2.3.6　f_1 と f_2 が既約であるとき，（ユニタリ）表現 $\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$ も既約となる．逆に，群 $G_1 \times G_2$ の任意の既約（ユニタリ）表現は G_1, G_2 の既約（ユニタリ）表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ を用いて，$\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$ と表すことができる．この事実は，射影的（ユニタリ）表現の場合でも同じように成り立つ．

証明.　部分群 $\{e\} \times G_2$ の既約な部分空間は適当な $v_1 \in \mathcal{H}_1$ の要素を選ぶことで，$\{v_1 \otimes v_2 \,|\, v_2 \in \mathcal{H}_2\}$ と書ける．よって，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の $\{0\}$ でない既約な部分空間は $\{v_1 \otimes v_2 \,|\, v_2 \in \mathcal{H}_2\}$ を含む．部分群 $G_1 \times \{e\}$ の既約な部分空間は適当な $v_2 \in \mathcal{H}_2$ の要素を選ぶことで，$\{v_1 \otimes v_2 \,|\, v_1 \in \mathcal{H}_1\}$ と書ける．$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の既約な部分空間が $v_1 \otimes v_2$ を含む場合は，$\{v_1 \otimes v_2 \,|\, v_1 \in \mathcal{H}_1\}$ を含む．したがって，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の $\{0\}$ でない既約な部分空間は任意の $v_1 \in \mathcal{H}_1$ について，$\{v_1 \otimes v_2 \,|\, v_1 \in \mathcal{H}_1\}$ を含むことから，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ と一致する．

f を空間 $\mathcal{H}$ への群 $G_1 \times G_2$ の既約（ユニタリ）表現とする．f_1 を $\mathsf{f}(g_1, e)$ で与えられる G_1 の $\mathcal{H}$ への（ユニタリ）表現とする．$\mathcal{H}_1$ を $\{0\}$ でない f_1 の既約部分空間とし，その表現を f_{λ_1} とする．このとき，既約表現の性質から，$\{\mathsf{f}(e, g_2)\mathcal{H}_1\}$ は空間 $\mathcal{H}$ を生成する．したがって，$\mathcal{H}$ の既約分解 $\mathcal{H} \cong \mathcal{U}_\lambda(G_1) \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ を得る．特に，$\mathsf{f}(e, g_2) : \mathcal{H}_1 \to \mathsf{f}(e, g_2)\mathcal{H}_1$ は G_1 の（ユニタリ）表現として同型写像となることから，$v_1 \in \mathcal{U}_\lambda(G_1)$ について，$\mathsf{f}(e, g_2)$ は $v_1 \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ を $v_1 \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ に移す．G_2 の $v_1 \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$ への（ユニタリ）表現を f_2 とすると，$\mathsf{f} \cong \mathsf{f}_\lambda \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$ となる．ここで，f_2 が G_2 の（ユニタリ）表現として既約でないなら，f も $G_1 \times G_2$ の（ユニタリ）表現として既約でない．したがって，f_2 も既約となる．　□

演習問題 8　G が可換群であるとき，既約表現の表現空間は1次元であること示せ．

2.4　射影的表現と群の拡大

2.4.1　射影的表現の因子団

前節で説明したように量子系での物理的な変換は射影的ユニタリ表現を用いて表される．しかし，射影的表現には，位相因子が現れるので，表現に比べて取り扱いが複雑である．実は，射影的表現は中心拡大で得られる群の表現に帰着できる．すなわち，群 G の射影的（ユニタリ）表現 f は以下のように，可換群 $\mathrm{U}(1)$ の G による中心拡大によって得られる群の（ユニタリ）表現に帰着できる．(2.12) で与えたように $\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ を $e^{i\theta(g,g')} := \mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g')\mathsf{f}(gg')^{-1} = \mathsf{f}(gg')^{-1}\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g')$ で与える．$\mathsf{f}(gg'g'')^{-1}\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g'g'')(\mathsf{f}(g'g'')^{-1}\mathsf{f}(g')\mathsf{f}(g'')) = \mathsf{f}(gg'g'')^{-1}\mathsf{f}(gg')(\mathsf{f}(gg')^{-1}\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(g'))\mathsf{f}(g'')$ が成り立つので，$\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ は条件 (2.10) を満たすため因子団となる．

以下では，射影的（ユニタリ）表現 f の**因子団**とよぶ．よって，因子団 $\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ による可換群 $\mathrm{U}(1)$ の G による拡大を $\tilde{G}$ とすると，G の射影的（ユニタリ）表現 f から $\tilde{G}$ の（ユニタリ）表現 $\tilde{\mathsf{f}}(e^{i\phi}, g) := e^{i\phi}\mathsf{f}(g)$ が定義できる．因子団が $\{1\}_{g,g'}$ となる場合は，拡大された群 $\tilde{G}$ は直積群と一致する．このとき，射影的（ユニタリ）表現 f は（ユニタリ）表現となる．ここで，f, f' が射影的ユニタリ表現であり，$\mathsf{f}'(g) = \mathsf{f}(g)e^{i\theta(g)}$ となる場合，密度行列 ρ に対する作用は $\mathsf{f}(g)\rho\mathsf{f}(g)^\dagger = \mathsf{f}'(g)\rho\mathsf{f}'(g)^\dagger$ となり，全く同じ作用となる．このような理由から，2 つの射影的（ユニタリ）表現 f, f' に対して，$\mathsf{f}'(g) = e^{i\theta(g)}A\mathsf{f}(g)A^{-1}$ を満たす行列（ユニタリ作用素）A と位相因子 $e^{i\theta(g)}$ が存在する場合，**同値**とする．このとき，射影的（ユニタリ）表現 f' の因子団は $\{e^{i\theta'(g,g')}\}_{g,g'}$ は $e^{i\theta'(g,g')} = \omega_g\omega_{g'}\omega_{gg'}^{-1}e^{i\theta(g,g')}$ で与えられる．

すなわち，$\{e^{i\theta'(g,g')}\}_{g,g'}$ は $\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ と同値な因子団となる．そして，f' と群 $\tilde{G}$ の（ユニタリ）表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ は $\tilde{\mathsf{f}}(\omega_g e^{i\phi}, g) := e^{i\phi}\mathsf{f}'(g)$ を満たす．したがって，同値な射影的（ユニタリ）表現に対して，一意に拡大の群 $H(G : \mathrm{U}(1))$（$\mathrm{U}(1)$ による G の拡大の群）の要素が対応する．以下この要素を $H(\mathsf{f})$ と記すことにする．特に，射影的（ユニタリ）表現 f が（ユニタリ）表現と同値であるとき，すなわち，因子団 $H(\mathsf{f})$ が $H(G : \mathrm{U}(1))$ の元として単位元となるとき，射影的（ユニタリ）表現 f は（ユニタリ）表現に**帰着可能**という．逆に，射影的（ユニタリ）表現 f が（ユニタリ）表現に帰着可能でないとき，f を**真に射影的な**（ユニタリ）表現という．

なお，$\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ が U(1) の部分群 C に含まれているとき，もしくは可換群 C の要素と見なせるとき，$\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ は，C の G による拡大を与える因子団となる．よって，$\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ は拡大の群 $H(G:C)$ の要素と見なせる．さらに，G の単位元 e について，$\mathsf{f}(e)=I$ となるとき，対応する因子団は正規化因子団となる．

以下，群 G の射影的（ユニタリ）表現 f の性質を $H(\mathsf{f})\in H(G:\mathrm{U}(1))$ の位数を通じて調べる．

補題 2.4.1　f を群 G の k 次元空間 $\mathcal{H}$ への射影的（ユニタリ）表現とする．このとき，$H(\mathsf{f})\in H(G:\mathrm{U}(1))$ の位数は k の約数である．

証明.　初めに，射影的（ユニタリ）表現 f に対して，新たな射影的（ユニタリ）表現 $\mathsf{f}'(g):=\mathsf{f}(g)(\det\mathsf{f}(g))^{-1/k}$ を定義する．新たな射影的（ユニタリ）表現は任意の $g\in G$ に対して，条件 $\det\mathsf{f}'(g)=1$ を満たす．すると，(2.12) より，$\mathsf{f}'(g_2)\mathsf{f}'(g_1)\mathsf{f}'(g_2g_1)^{-1}=e^{i\theta'(g_2,g_1)}$ となるが，左辺の行列式は 1 であるので，$e^{ik\theta'(g_2,g_1)}=1$ となる．よって，$H(\mathsf{f})\in H(G:\mathrm{U}(1))$ の位数は k の約数となる．□

上記の補題に定理 2.2.1 を組み合わせると以下の系を得る．

系 2.4.2　f を $\mathcal{H}$ への射影的（ユニタリ）表現 f とする．G が有限群であり G の位数と $\mathcal{H}$ の次元 k は互いに素とする．このとき，$H(\mathsf{f})\in H(G:\mathrm{U}(1))$ は単位元となり，f は（ユニタリ）表現となる．

2.4.2　既約性と射影的表現

前の項では，任意の G の射影的表現は，ある可換有限群 C の群 G による中心拡大 $\tilde{G}$ の表現を用いて表されることを確認した．以下では，そのような中心拡大 $\tilde{G}$ の既約（ユニタリ）表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ から，どのように，G の既約な射影的（ユニタリ）表現が得られるか調べる．

この場合，Schur の補題より，$c\in C$ に対して $\tilde{\mathsf{f}}(c)$ は定数である．C の位数を m とすると，$\tilde{\mathsf{f}}(c)^m=1$ となる．任意の $g\in G=\tilde{G}/C$ に対して，同値類 g に含まれる要素 $\tilde{g}\in\tilde{G}$ を 1 つ選び，

$$\mathsf{f}(g):=\tilde{\mathsf{f}}(\tilde{g}) \tag{2.24}$$

を定義する．すると，$\tilde{\mathsf{f}}(c)$ が定数であることから，f は射影的（ユニタリ）表現になる．さらに，同値類 g に含まれる2つの要素 $\tilde{g},\tilde{g}' \in \tilde{G}$ について，$\tilde{\mathsf{f}}(\tilde{g}')$ は $\tilde{\mathsf{f}}(\tilde{g})$ のスカラー倍で与えられる．したがって，f についての条件 (2.19) と $\tilde{\mathsf{f}}$ についての条件 (2.19) は同値であるので，f は既約な射影的（ユニタリ）表現になる．このように，G による中心拡大 $\tilde{G}$ の既約な（ユニタリ）表現が与えられれば，群 G の既約な射影的（ユニタリ）表現を構成することができる．よって，射影的表現 f の因子団は拡大の群 $H(G:C)$ の要素となる．逆に，f が既約な射影的（ユニタリ）表現であるとき，(2.24) を満たす $\tilde{G}$ の（ユニタリ）表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ は既約となる．この事実を用いると，上記の補題 2.4.1 の系として以下を得る．

系 2.4.3 f を $\mathcal{H}$ への射影的（ユニタリ）表現とし，可換群 C の G による拡大 $\tilde{G}$ の既約（ユニタリ）表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ が条件 (2.24) を満たすとする．このとき，可換群 C の位数と $\mathcal{H}$ の次元 k が互いに素であるならば，$H(\mathsf{f}) \in H(G:C)$ は単位元となり，f は既約（ユニタリ）表現となる．

次に，群 $\tilde{G}$ の（ユニタリ）表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ が既約とは限らない場合について考えよう．このとき，Schur の補題が成立せず，$\tilde{\mathsf{f}}(c)$ は定数とは限らず，(2.24) を満たす射影的（ユニタリ）表現 f は必ずしも存在しない．一般には，$\tilde{\mathsf{f}}(c)$ の値が既約成分に応じて異なる．すなわち，仮に $\tilde{\mathsf{f}}$ が既約であった場合，(2.24) を用いて f を定義すると，その因子団は表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ に依存する．

以下では，因子団が $[\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}] \in H(G:\mathrm{U}(1))$ と同値となる既約な射影的ユニタリ表現のラベルの集合を $\hat{G}([\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}])$ とし，有限次元の射影的ユニタリ表現のラベルの集合を $\hat{G}_{\mathrm{f}}([\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}])$ とする．$\tilde{\mathsf{f}}$ が既約ユニタリ表現であるとき，$c \in C(\tilde{G})$ について $\tilde{\mathsf{f}}(c)$ は定数であるので，中心 $C(\tilde{G})$ の要素は密度行列を動かさない．したがって，密度行列に対する作用を与える変換群は，$\tilde{G}$ ではなく，$G = \tilde{G}/C(\tilde{G})$ となる．ここで，$\tilde{\mathsf{f}}$ が既約でなくても，$c \in C(\tilde{G})$ について $\tilde{\mathsf{f}}(c)$ が定数となる場合は，$\tilde{G}$ ではなく，$G = \tilde{G}/C(\tilde{G})$ が密度行列に対する作用を与える変換群である．このとき，(2.24) を満たす G の射影的ユニタリ表現 f が存在し，f が密度行列に対する作用を与える．

そして，$\lambda_1,\ldots,\lambda_l \in \hat{G}([\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}])$ に対して，因子団が $\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ となるように，既約な射影的ユニタリ表現 $\mathsf{f}_{\lambda_1},\ldots,\mathsf{f}_{\lambda_l}$ を取り直したとき，こ

れらの直和 $\mathsf{f}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathsf{f}_{\lambda_l}$ は射影的ユニタリ表現となる．

例えば，C が位数2の巡回群 U_2 である場合，$H(G:\mathrm{U}_2)$ の要素は2つしか存在しない．$\tilde{G}$ を U_2 の G による中心拡大とし，$\tilde{\mathsf{f}}_1,\ldots,\tilde{\mathsf{f}}_k$ を $\tilde{G}$ の表現とする．このとき，対応する G の射影表現 $\mathsf{f}_1,\ldots,\mathsf{f}_k$ が表現とならないとき，これらは，同値な因子団をもつ．そのため，適切に同値な因子団を選びなおすことにより，$\mathsf{f}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{f}_k$ は射影表現となる．

2.4.3　U(1) による拡大

次に，これまでとは逆に群 G の $\mathrm{U}(1)$ による拡大を考える．（$\mathrm{U}(1)$ の G による拡大でないことに注意せよ．）このようなタイプの拡大も後に必要となるので，ここで扱うことにする．$C(G)$ の元 ω を選び，その位数を m とする．ω を用いて，G の $\mathrm{U}(1)$ による拡大を以下で定義する．すなわち，$(e^{i\theta_1},g_1),(e^{i\theta_2},g_2) \in \mathrm{U}(1)\cdot G$ について，積を

$$(e^{i\theta_1},g_1)\cdot(e^{i\theta_2},g_2) := \begin{cases} (e^{i(\theta_1+\theta_2)},g_1g_2) & \theta_1+\theta_2<2\pi\text{の場合} \\ (e^{i(\theta_1+\theta_2-2\pi)},g_1g_2\omega) & \theta_1+\theta_2\geq 2\pi\text{の場合} \end{cases}$$

で与える．このとき，その群の中心は $C(G)\rtimes\mathrm{U}(1)$ となる．ここで改めて，$(e^{i\theta_1},g)$ を $(e^{i\theta_1/m},g)$ と記すことにすると，

$$(e^{i\theta_1},g_1)\cdot(e^{i\theta_2},g_2) := \begin{cases} (e^{i(\theta_1+\theta_2)},g_1g_2) & \theta_1+\theta_2<2\pi/m\text{ の場合} \\ (e^{i(\theta_1+\theta_2-2\pi)},g_1g_2\omega) & \theta_1+\theta_2\geq 2\pi/m\text{ の場合} \end{cases}$$

となる．以下では，積が上の式で定義された群を $\overline{G}_\omega$ と記すことにする．

そして，f を G の $\mathcal{H}$ への既約表現とすると，Schur の補題より，$C(G)$ の生成元 ω に対して，整数 $l(\mathsf{f})$ を選べば，$\mathsf{f}(\omega)=e^{i2\pi l(\mathsf{f})/m}I$ となる．このとき，G の拡大 $\overline{G}_\omega$ の表現は整数 $n\in\mathbb{Z}$ を用いて $\mathsf{f}(e^{i\theta_1},g)=\mathsf{f}(g)e^{i\theta_1(nm+l(\mathsf{f}))}$ で与えられる．

2.5　半直積と表現

2.5.1　基本的な関係

半直積 $H\rtimes K$ の（射影的）（ユニタリ）表現と個々の群 K,H の（射影的）

(ユニタリ) 表現がどのような関係にあるか調べよう. 群 K の群 H への作用 T に基づく半直積 $H \rtimes K$ の $\mathcal{H}$ への (ユニタリ) 表現 f を考える. 部分群 H, K へ制限した (ユニタリ) 表現をそれぞれ f_H, f_K と記したとき, (2.3) より

$$\mathsf{f}(h,k) = \mathsf{f}_H(h)\mathsf{f}_K(k) \tag{2.25}$$

$$\mathsf{f}_H(T(k)(h)) = \mathsf{f}_K(k)\mathsf{f}_H(h)\mathsf{f}_K(k^{-1}) \tag{2.26}$$

が成り立つ. そして, 任意の $k \in K$ について, $\mathsf{f}_{H,k} : H \ni h \mapsto \mathsf{f}_H(khk^{-1})$ は H の (ユニタリ) 表現となる.

さらに, $H \rtimes K$ の射影的 (ユニタリ) 表現 f が与えられた場合, 部分群 H, K へ制限した射影的 (ユニタリ) 表現をそれぞれ f_H, f_K と記すと, (2.3) より実数 $\theta(h,k), \tilde{\theta}(h,k)$ を選ぶと,

$$e^{i\theta(h,k)}\mathsf{f}(h,k) = \mathsf{f}_H(h)\mathsf{f}_K(k) \tag{2.27}$$

$$e^{i\tilde{\theta}(h,k)}\mathsf{f}_H(T(k)(h)) = \mathsf{f}_K(k)\mathsf{f}_H(h)\mathsf{f}_K(k^{-1}) \tag{2.28}$$

が成り立つ. そして, 任意の $k \in K$ について, $\mathsf{f}_{H,k} : H \ni h \mapsto \mathsf{f}_H(khk^{-1})$ は H の射影的 (ユニタリ) 表現となる. このように, $H \rtimes K$ の (射影的) (ユニタリ) 表現から H, K の (射影的) (ユニタリ) 表現が構成できる.

2.5.2 一般的な表現の構成*

以下では, H, K の (射影的) (ユニタリ) 表現から $H \rtimes K$ の (射影的) (ユニタリ) 表現がどのように構成できるか調べる. 特に, $H \rtimes K$ の (射影的) (ユニタリ) 表現が既約である場合, どのように, H, K の既約な (射影的) (ユニタリ) 表現から特徴付けられるか調べる.

構成 1: f_H を $\mathcal{H}$ 上の H の (ユニタリ) 表現とする. そして, 任意の $k \in K$ について, (ユニタリ) 表現 $\mathsf{f}_{H,k} : H \ni h \mapsto \mathsf{f}_H(khk^{-1})$ は f_H と同型な表現とする. このとき, $\mathsf{f}_{H,k}(h) = \mathsf{f}_K(k)\mathsf{f}_H(h)\mathsf{f}_K(k)^{-1}$ を満たす (ユニタリ) 行列 $\mathsf{f}_K(k)$ が存在する. このとき, $\mathsf{f}_K(k)$ は K の射影的 (ユニタリ) 表現となり, f_H の K についての**随伴表現**とよばれる. したがって, $\mathsf{f}(h,k) := \mathsf{f}_H(h)\mathsf{f}_K(k)$ とすると, f は条件 (2.26) を満たし, $H \rtimes K$ の (ユニタリ) 表現となる. 以下では, この表現を f_H と f_K の**半直積 (ユニタリ) 表現**とよび, $\mathsf{f}_H \rtimes \mathsf{f}_K$ と記す. 特に, f_H が既約であるとき, $\mathsf{f}_H \rtimes \mathsf{f}_K$ も既約となる.

構成 2: f_H を $\mathcal{H}$ 上の H の (ユニタリ) 表現とする．そして，(ユニタリ) 表現 $\mathsf{f}_{H,t}$ が f_H と同型となる $t \in K$ の集合 T は K の部分群となり，以下では，その部分群を表現 f_H の**慣性群**とよぶ．以下，$t \in T$ に対して，同じように，$\mathsf{f}_T(t)$ を $\mathsf{f}_{H,t}(h) = \mathsf{f}_T(t)\mathsf{f}_H(h)\mathsf{f}_T(t)^{-1}$ で定義する．そして，これが (ユニタリ) 表現となるとする．等質空間 K/T の要素 $[k]$ ごとに表現 $\mathsf{f}_{H,k}(h)$ を与える Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{[k]}$ を考える．このとき，表現 $\mathsf{f}_{H,k}(h)$ は代表元 k のとり方によらない．ここで，K/T の要素の代表元 $k_1, \ldots, k_n, \ldots$ を選び，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_{[k_n]}$ への線型写像 $U_{[k_n]}$ を $\mathsf{f}_{H,k_n}(h) = U_{[k_n]}\mathsf{f}_H(h)U_{[k_n]}^{-1}$ を満たすものとして定義する．ただし，単位元 e を含む同値類の代表元は e とする．空間 $\bigoplus_{[k]\in K/T}\mathcal{H}_{[k]}$ 上の $k' \in K$ に対して，$\mathsf{f}_K(k') := \bigoplus_{[k]\in K/T} U_{[k'k]}\mathsf{f}_T(t(k',[k]))U_{[k]}^{-1}$ を定義する．ここで，$t(k',[k])$ は $[k]$ と $[k'k]$ の代表元 k_1, k_2 を用いて，$k_2^{-1}k'k_1$ で与えられる．すると，f_K は K の (ユニタリ) 表現となる．また，$\tilde{\mathsf{f}}_H(h) := \bigoplus_{[k]\in K/T}\mathsf{f}_{H,k}(h)$ も H の (ユニタリ) 表現となる．したがって，$H \rtimes K$ の (ユニタリ) 表現 $\tilde{\mathsf{f}}_H \rtimes \mathsf{f}_K$ が定義できる．以下では，この表現を $\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T$ と記す．特に，f_H が既約であるとき，$\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T$ も既約となる．また，T が単位元だけからなるとき，f_T は自明な表現に限られるので，この表現を $\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} 1$ と記す．

構成 3: 構成 1 において，$\mathcal{H}'$ 上の H の (ユニタリ) 表現 f_H に対して，K の射影的 (ユニタリ) 表現 f_K が必ずしも (ユニタリ) 表現とならないとする．このとき，位相因子が $\mathsf{f}_K(k)$ の位相因子の複素共役な複素数で与えられる $\mathcal{H}'$ 上の K の射影的 (ユニタリ) 表現 $\mathsf{f}'_K(k)$ を考える．すると，$\mathsf{f}_K \otimes \mathsf{f}'_K$ は $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ 上の K の (ユニタリ) 表現となる．したがって，$H \rtimes K$ の (ユニタリ) 表現 $(\mathsf{f}_H \otimes I) \rtimes (\mathsf{f}_K \otimes \mathsf{f}'_K)$ が定義できる．以下では，この表現を $\mathsf{f}_H \rtimes \mathsf{f}_K \otimes \mathsf{f}'_K$ と記す．特に，f_H と f'_K が既約であるとき，$\mathsf{f}_H \rtimes \mathsf{f}_K \otimes \mathsf{f}'_K$ も既約となる．

構成 4: 構成 2 において，T の射影的 (ユニタリ) 表現 f_T が必ずしも (ユニタリ) 表現とならないとする．このとき，位相因子が $\mathsf{f}_T(t)$ の位相因子の複素共役な複素数で与えられる T の射影的 (ユニタリ) 表現 $\mathsf{f}'_T(t)$ を考える．すると，$\mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}'_T$ は T の (ユニタリ) 表現となる．したがって，$H \rtimes K$ の $\bigoplus_{[k]\in K/T}\mathcal{H}_{[k]} \otimes \mathcal{H}'$ 上の (ユニタリ) 表現 $(\mathsf{f}_H \otimes I)\tilde{\rtimes}(\mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}'_T)$ が定義できる．以下では，この表現を $\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}'_T$ と記す．特に，f_H と f'_T が既約であるとき，$\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}'_T$ も既約となる．

そして，定理 2.3.6 の一般化として以下を得る．

定理 2.5.1 $H \rtimes K$ の任意の既約（ユニタリ）表現 f は H の既約表現 f_H, T についての f_H の随伴表現 f_T, と T の既約な射影的（ユニタリ）表現 f'_T を用いて $\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}'_T$ で与えられる．

ここで，T は f_H の 慣性群であり，射影的（ユニタリ）表現 f'_T の位相因子は f_T の位相因子の複素共役である．

証明. 表現 f を H の表現として考え，その既約分解を考える．その既約分解に現れる H の既約表現の1つを f_H とし，その表現空間を $\mathcal{H}$ とする．そして，f_H の重複度を m とし，この表現の慣性群を T とし，T についての f_H の随伴表現を f_T とする．ここで，テンソル積空間 $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^m$ を考える．慣性群の定義に注意すると，$|u\rangle \otimes |v\rangle$ と $t \in T$ に対して，$\mathsf{f}(t)|u\rangle \otimes |v\rangle$ はある $|u'\rangle$ を用いて，$|\mathsf{f}_T(t)u\rangle \otimes |u'\rangle$ と書ける．したがって，$|u\rangle$ から $|u'\rangle$ を与える写像を $\mathsf{f}_T(t)'$ とすると，以下に示すように，f'_T は T の既約な射影的（ユニタリ）表現となる．

以下この事実を示す．T についての 既約な f'_T の部分射影的（ユニタリ）表現 f''_T を選ぶと，$\mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}''_T$ は射影的（ユニタリ）表現となることから，f''_T の位相因子は f_T の位相因子の複素共役となる．ここで，構成2（または構成4）で考えた等質空間 K/T の作用を考えることにより，$H \rtimes K$ の既約な（ユニタリ）表現 $\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}''_T$ が定義できる．この表現は f の f'_T の部分（ユニタリ）表現となる．f の既約性より，f は $\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}''_T$ に一致する．$\mathcal{H}''$ を f''_T の表現空間とすると，$\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}''_T$ の表現空間の中で，H に制限した表現が f_H と同型な空間は $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}''$ である．したがって，f'_T は f''_T に一致する．そして，f は $\mathsf{f}_H \tilde{\rtimes} \mathsf{f}_T \otimes \mathsf{f}'_T$ に一致する． □

2.6 実表現と複素共役表現

2.6.1 実ベクトル空間とその複素化

量子論で現れるのは，複素 Hilbert 空間であるので，実ベクトル空間を扱うことはまれである．しかし，物理的に意味のある表現を扱うために，しばしば，実ベクトル空間を扱う必要が生じる．本節では，実ベクトル空間と複素ベクトル空間の関係や，実ベクトル空間上での表現などを扱う．そのために，実

ベクトル空間 V の複素化を定義する必要がある．

内積付き実ベクトル空間 V に対して，ベクトル空間 $V \oplus V$ に複素数倍を以下で定義した空間を考える．

$$(x+iy)(a,b) := (xa - yb, ay + xb), \quad \forall (a,b) \in V \oplus V,\ \forall x+iy \in \mathbb{C}.$$

さらに，以下の複素内積を入れた空間を $V \otimes \mathbb{C}$ と表す．

$$((a',b'),(a,b)) := (a' \cdot a - b' \cdot b, a' \cdot b + b' \cdot a), \quad \forall (a',b'),(a,b) \in V \oplus V.$$

また，以下のエルミート内積を入れた空間を $V \bar{\otimes} \mathbb{C}$ と表す．

$$\langle (a',b') | (a,b) \rangle := (a' \cdot a + b' \cdot b, a' \cdot b - b' \cdot a), \quad \forall (a',b'),(a,b) \in V \oplus V.$$

このとき，$v, v' \in V \bar{\otimes} \mathbb{C}$, $z, z' \in \mathbb{C}$ に対して，$\langle z'v' | zv \rangle = \bar{z}' z \langle v' | v \rangle$ となる．

2.6.2　実表現

ここまで扱った表現では，表現空間が複素ベクトル空間であった．同様に，表現空間が実 Hilbert 空間（正定値内積付き実ベクトル空間）となる表現も定義できる．そのような表現は**実表現**とよばれる．一般に，単に表現と書くと，表現空間が複素ベクトル空間となる表現を表すが，実表現と区別を強調したい場合は，複素表現と記す．

実表現の場合も，複素表現の場合と同じように，不変性，既約性，可約性，完全可約性，分解可能性，既約分解，指標，既約指標，重複度が定義できる．実表現 f が内積を保存する場合は，**直交表現**とよばれる．射影的表現については同様に定義できる．

しかし，実表現の場合，Schur の補題が成立しない．すなわち，実ベクトル空間 V 上の実表現として既約となる群 G の表現 f で以下を満たすものが存在する．V 上の実行列 A で単位行列の定数倍でないにも関わらず，任意の $g \in G$ について，$\mathsf{f}(g)A = A\mathsf{f}(g)$ を満たすものが存在する．具体例としては，$V = \mathbb{R}^2, G = \mathrm{U}(1)$ とし，$\mathsf{f}(e^{i\theta}) := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$A = \mathsf{f}(e^{i\theta_0})$ とすると，上記の条件を満たす．そのため，実表現についての既約性は有効ではないので，表現 f が V 上の実表現であっても，f が既約と述べたときは，表現空間 $V \bar{\otimes} \mathbb{C}$ 上の複素表現としての既約性を意味することとする．

2.6.3　複素共役表現

次に群 G の有限次元複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への表現 f に対して，

$$\bar{\mathsf{f}}(g) := \overline{\mathsf{f}(g)} \tag{2.29}$$

で与えられる表現を f の**複素共役表現**とよぶ．（無限次元複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素 A に対して，その複素共役作用素は一般に定義されないので，複素共役表現は有限次元表現に対してのみ定義される．）複素共役表現の定義は，基底のとり方に依存するが，異なる基底に基づく複素共役表現を考えても，互いに同値な表現となる．

特に，f が $\bar{\mathsf{f}}$ と同型なとき，f を**自己共役表現**とよぶ．このとき，その指標は実数に値をとる．さらに，$\lambda \in \hat{G}$ について，既約表現 f_λ の複素共役表現は既約表現となり，その表現を表すラベルを $\lambda^* \in \hat{G}$ と記す．すなわち，f_λ の複素共役表現を f_{λ^*} と記す．

さらに，2つの複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への実線型な写像 A が任意の $c \in \mathbb{C}$, $|v\rangle \in \mathcal{H}_1$ について，$A(c|v\rangle) = \bar{c}A(|v\rangle)$ を満たすとき，**共役線型**という．さらに，$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の（ユニタリ）表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ が与えられているとする．任意の $g \in G$ について，$A\mathsf{f}_1(g) = \mathsf{f}_2(g)A$ を満たす共役線型写像 A が存在するとき，（ユニタリ）表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ は**共役同型**であるという．このとき，A を（G の（ユニタリ）表現についての）**共役同型写像**とよぶ．G の（ユニタリ）表現 f_1 と f_2 が共役同型であるとき，f_2 は f_1 の共役表現 $\overline{\mathsf{f}_1}$ と同型である．したがって，V 上の既約実表現 f は自然に $V \bar{\otimes} \mathbb{C}$ 上の複素表現と見なせる．この複素表現は自己共役表現となる．

逆に，$\mathcal{H}$ 上の複素表現 f に対して，$\mathcal{H} = V_{\mathbb{C}}$ となる実ベクトル空間 $V \subset V_{\mathbb{C}}$ が表現 f について不変部分空間となるとき，V 上の実表現 $\mathsf{f}_{\mathbb{R}}$ が構成できる．このとき，f は**実表現化可能**という．自己共役な複素表現は必ずしも，実表現化可能とは限らない．

f_1 が射影的（ユニタリ）表現である場合，その因子団が $\mathcal{E} := [\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}] \in H(G : U(1))$ で与えられる場合，その共役表現 $\overline{\mathsf{f}_1}$ は因子団が $\mathcal{E}^{-1} = [\{e^{-i\theta(g,g')}\}_{g,g'}] \in H(G : U(1))$ となる射影的（ユニタリ）表現となる．この場合についても同様に共役同型性が定義できるが，射影的（ユニタリ）表現が共役同型となるのは，その因子団が $\mathcal{E}$ が $\mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E}$ となる場合，すなわち，群 $H(G : U(1))$ の要素として位数が2になる場合に限られる．

次に，次元が $2d$ である実表現空間 V を考え，$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて，V 上の行列

$$J_d := I_d \otimes J \tag{2.30}$$

を定義する．そして，$x \in V$ に対して，$(x_1 + ix_{d+1}, \ldots, x_d + ix_{2d})$ を考えると，V は d 次元の複素ベクトル空間 $\mathcal{V}$ と見なせる．G の実表現 f が複素ベクトル空間 $\mathcal{V}$ 上の複素表現になるとき，実表現 f は**複素化可能**という．ここで，$\mathcal{V}$ は $V \otimes \mathbb{C}$ と異なることに注意せよ．複素化可能であるために必要十分条件は

$$\mathsf{f}(g) J_d = J_d \mathsf{f}(g) \tag{2.31}$$

を満たすことである．

演習問題 9　自己共役表現の指標は実数であることを示せ．

演習問題 10　複素化可能であるために必要十分条件は (2.31) であることを示せ．

2.7　合成系上の表現

2.3 節では，表現が既約分解された形で与えられると，個々の既約表現について扱えば，十分であるので，その取り扱いが簡略化できることを述べた．しかし，物理的にはテンソル積表現の形で与えられることの方が多い．

最初に最も簡単な例として，1 つ目の量子系が，群 G の既約表現 f_λ の表現空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)$ で与えられ，2 つ目の量子系 $\mathbb{C}^d$ には，群 G が全く作用しない場合を考えよう．この場合，任意のベクトル $|X\rangle\rangle \in \mathcal{U}_\lambda(G) \otimes \mathbb{C}^d$ が G の作用によってどのように振舞うか興味がある．以下では，d が $\mathcal{U}_\lambda(G)$ の次元 d_λ よりも大きい場合を考える．

ここで，行列 X の極分解を考える．すると，$\mathcal{U}_\lambda(G)$ および $\mathbb{C}^d$ の正規直交基底 $\{e_j\}_{j=1}^{d_\lambda}$, $\{f_j\}_{j=1}^{d}$ を適切に選ぶと，$|X\rangle\rangle = \sum_{j=1}^{d_\lambda} a_j |e_j\rangle |f_j\rangle$ を得る．そして，$\mathcal{K}$ を $\{f_j\}_{j=1}^{d_\lambda}$ で生成される $\mathbb{C}^d$ の部分空間とすると，任意の $g \in G$ につ

いて，$\mathsf{f}_\lambda(g)|X\rangle\rangle$ は $\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathcal{K}$ に含まれる．すなわち，$|X\rangle\rangle$ の G による軌道を扱う限りにおいては，全空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathbb{C}^d$ を扱う必要はなく，その部分空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathcal{K}$ を扱えば十分である．この空間は，$\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathbb{C}^{d_\lambda}$ と同型であるので，高々重複度は d_λ の場合まで扱えば十分である．

一般には，G の表現が与えられ，既約分解が可能である場合，(2.17) で述べたように，その表現空間は，$\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathbb{C}^{n_\lambda}$ で与えられる．しかし，上記の議論から，特定のベクトルの群 G の作用による振る舞いを見るためには，その表現空間が $\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}}\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathbb{C}^{d_\lambda}$ で与えられる場合を扱えば十分である．これは，重要な事実であり，2.8 節で述べるように，このような場合に限ることで，さらなる解析が可能となる．

次に，2 つの量子系が群 G の 2 つの既約表現 f_λ, $\mathsf{f}_{\lambda'}$ の表現空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)$, $\mathcal{U}_{\lambda'}(G)$ として与えられる場合を考える．このとき，合成系を表すテンソル積空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathcal{U}_{\lambda'}(G)$ には，自然にテンソル積表現 $\mathsf{f}_\lambda\otimes\mathsf{f}_{\lambda'}$ が与えられる．2 つの表現 f_λ, $\mathsf{f}_{\lambda'}$ が有限次元のユニタリ表現であれば，このテンソル積表現は補題 2.3.1 より，完全可約である．テンソル積表現 $\mathsf{f}_\lambda\otimes\mathsf{f}_{\lambda'}$ が完全可約であるとき，空間 $\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathcal{U}_{\lambda'}(G)$ に $\mathcal{U}_{\lambda''}(G)$ が現れる重複度を表す**重複度定数** $C^{\lambda''}_{\lambda,\lambda'}(G)$ を以下で定義する．

$$\mathcal{U}_\lambda(G)\otimes\mathcal{U}_{\lambda'}(G)\cong\bigoplus_{\lambda''\in\hat{G}}\mathcal{U}_{\lambda''}(G)\otimes\mathbb{C}^{C^{\lambda''}_{\lambda,\lambda'}(G)}. \tag{2.32}$$

既約な部分（ユニタリ）表現は重複度が 0 でないもので与えられる．

G が可換群である場合，既約表現は 1 次元となる（演習問題 8）．すなわち，$\lambda\in\hat{G}$ に対して，$\mathsf{f}_\lambda : G\mapsto \mathrm{U}(1)$ が成り立つ．そして，$\lambda,\lambda'\in\hat{G}$ に対して，$\mathsf{f}_\lambda(g)\mathsf{f}_{\lambda'}(g)$ も表現となる．この表現を表すラベルを $\lambda+\lambda'\in\hat{G}$ とする．すると，この演算に関して $\hat{G}$ は可換群となる．特に，上記の重複度係数については以下の式が成り立つ．

$$C^{\lambda''}_{\lambda,\lambda'}(G)=\begin{cases}1 & \lambda''=\lambda+\lambda' \text{ のとき}\\ 0 & \text{上記以外}\end{cases} \tag{2.33}$$

次に，2 つ目の表現空間 $\mathcal{U}_{\lambda'}(G)$ が $\mathcal{U}_{\lambda^*}(G)$ で与えられている場合について考えよう．この場合，それぞれの基準基底 $\{|j\rangle_A\}$, $\{|j\rangle_B\}$ を適切に選ぶと，$\mathsf{f}_{\lambda^*}=\bar{\mathsf{f}}_\lambda$ となる．この基準基底を用いると，任意の合成系上のベクトルは正

方行列 X を用いて，$|X\rangle\rangle$ と書くことができる．このとき，以下の補題が成り立つ．

補題 2.7.1　任意の合成系上のベクトルは $|X\rangle\rangle$ について以下は同値である．

(1)　$|X\rangle\rangle$ は $|I\rangle\rangle$ の定数倍である．

(2)　任意の $g \in G$ について，

$$\mathsf{f}(g) \otimes \bar{\mathsf{f}}(g)|X\rangle\rangle = |X\rangle\rangle, \quad \forall g \in G \tag{2.34}$$

が成り立つ．

証明.　**(1)**⇔**(2)**，は $\mathsf{f}(g) \otimes \bar{\mathsf{f}}(g)|I\rangle\rangle = |\mathsf{f}(g)\bar{\mathsf{f}}(g)^T\rangle\rangle = |I\rangle\rangle$ となるから示せる．

逆に条件 **(2)** が成り立つとすると，$X = \mathsf{f}_\lambda(g)X\mathsf{f}_{\lambda^*}(g)^T = \mathsf{f}_\lambda(g)X\mathsf{f}_\lambda(g)^{-1}$ が成り立ち，Schur の補題より，X は単位行列の定数倍に限られる．よって，**(2)**⇔**(1)** を得る．□

さらに，以下の補題も成り立つ．

補題 2.7.2　群 G の既約とは限らない空間 $\mathcal{H}$ への表現 f が与えられたとする．このとき，$\mathcal{H} \otimes \mathcal{U}_{\lambda^*}$ 上の純粋状態 $|X\rangle\rangle$ について以下は同値である．

(1)　$\mathcal{H}$ は既約な表現空間 $\mathcal{U}_\lambda$ を重複度 1 で含む．

(2)　合成系 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{U}_{\lambda^*}$ 上の群 G の作用について

$$\mathsf{f}(g) \otimes \mathsf{f}_{\lambda^*}(g)|X\rangle\rangle = |X\rangle\rangle, \quad \forall g \in G \tag{2.35}$$

を満たす純粋状態が一意に存在する．

証明.　条件 **(2)** が成り立つとする．すると，$\mathrm{Tr}_\mathcal{H} |X\rangle\rangle\langle\langle X|$ は $\mathcal{U}_{\lambda^*}$ の既約性から，単位行列の定数倍となる．したがって，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{U}_{\lambda^*}} |X\rangle\rangle\langle\langle X|$ は $\mathrm{Tr}_{\mathcal{U}_{\lambda^*}} |X\rangle\rangle\langle\langle X|$ の値域 $\mathcal{K}$ への射影 $P_\mathcal{K}$ の定数倍となる．また，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{U}_{\lambda^*}} |X\rangle\rangle\langle\langle X|$ は表現の下で不変であるから，$\mathcal{K}$ は表現 f に関して閉じている．したがって，$P_\mathcal{K}X = \mathsf{f}|_\mathcal{K}(g)P_\mathcal{K}X(\mathsf{f}_{\lambda^*}(g))^T$ となり，$\mathsf{f}|_\mathcal{K}(g) = P_\mathcal{K}X((\mathsf{f}_{\lambda^*}(g))^T)^{-1}(P_\mathcal{K}X)^{-1} = P_\mathcal{K}X\overline{\mathsf{f}_{\lambda^*}(g)}(P_\mathcal{K}X)^{-1}$ を得る．この式は，表現 $\mathsf{f}|_\mathcal{K}(g)$ が表現 $\mathsf{f}_\lambda(g)$ と同型であることを示している．よって，$\mathcal{H}$ は既約な表現空間 $\mathcal{U}_\lambda$ を少なくとも重

複度1で含む．ここで，重複度が1より大きいとすると，不変性(2.35)を満たす状態は複数存在する．これは条件**(2)**に矛盾するので，$\mathcal{H}$ は既約な表現空間 $\mathcal{U}_\lambda$ を重複度1で含むことがわかる．よって，条件**(1)**が成り立つ．

逆に，条件**(1)**が成り立つとする．すると，上記の議論から，不変性(2.35)を満たす状態は一意に定まる．逆に，$\mathcal{H}$ が既約な表現空間 $\mathcal{U}_\lambda$ を含む．　□

補題2.7.2を，3つの量子系上のエンタングル状態に応用すると以下の補題を得る．

補題 2.7.3　3つの群 G の既約ユニタリ表現 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \hat{G}$ について，以下の4つの条件は同値である．

(1)　$\mathcal{U}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_3}$ の既約成分に $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ が（重複度1で）含まれる．

(2)　合成系 $\mathcal{U}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_3} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_2^*}$ 上の群 G の作用について不変な純粋状態が存在する．すなわち，以下を満たす純粋状態 $|x\rangle$ が（一意に）存在する．

$$\mathsf{f}_{\lambda_1}(g) \otimes \mathsf{f}_{\lambda_3}(g) \otimes \mathsf{f}_{\lambda_2^*}(g)|x\rangle = |x\rangle, \quad \forall g \in G. \tag{2.36}$$

(3)　$\mathcal{U}_{\lambda_1^*} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_2}$ の既約成分に $\mathcal{U}_{\lambda_3}$ が（重複度1で）含まれる．

(4)　$\mathcal{U}_{\lambda_2^*} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_1}$ の既約成分に $\mathcal{U}_{\lambda_3^*}$ が（重複度1で）含まれる．

証明.　補題2.7.2より，**(1)**⇔**(2)**, **(3)**⇔**(2)**, **(4)**⇔**(2)** を得ることから示せる．　□

したがって，$\mathcal{U}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_3}$ の既約成分に $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ が重複度1で含まれる場合，$\mathcal{U}_{\lambda_1^*} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_2}, \mathcal{U}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_2^*}$ に $\mathcal{U}_{\lambda_3}, \mathcal{U}_{\lambda_3^*}$ が含まれる．以下の補題では，これらの部分空間がどのように埋め込まれているか扱う．

補題 2.7.4　$\mathcal{U}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_3}$ の既約成分に $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ が重複度1で含まれるとする．このとき以下が成り立つ．

(1)　$\mathcal{U}_{\lambda_3}$ から $\mathcal{U}_{\lambda_1^*} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_2}$ への以下の写像の値域は $\mathcal{U}_{\lambda_1^*} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_2}$ の部分空間 $\mathcal{U}_{\lambda_3}$ となり G の表現空間として同型写像となる．

$$|u\rangle \mapsto (I_{\lambda_1^*} \otimes Q_{\lambda_2})|u\rangle \otimes |I_{\lambda_1}\rangle\rangle, \quad \forall |u\rangle \in \mathcal{U}_{\lambda_3}. \tag{2.37}$$

ここで，Q_{λ_2} は $\mathcal{U}_{\lambda_2}$ への射影である．

(2) $\mathcal{U}_{\lambda_3}$ から $\mathcal{U}_{\lambda_1}\otimes\mathcal{U}_{\lambda_2^*}$ への写像 $|u\rangle(\in\mathcal{U}_{\lambda_3})\mapsto\langle u|I_{\lambda_1}\rangle\rangle$ の値域は $\mathcal{U}_{\lambda_1}\otimes\mathcal{U}_{\lambda_2^*}$ の部分空間 $\mathcal{U}_{\lambda_3^*}$ となり G の表現空間として共役同型写像となる．

証明． **(1)** の証明: $|u\rangle\neq 0$ のとき，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{U}_{\lambda_1^*}}|u\rangle\langle u|\otimes|I_{\lambda_1}\rangle\rangle\langle\langle I_{\lambda_1}|=|u\rangle\langle u|\otimes I_{\lambda_1}$ であるので，$(I_{\lambda_1^*}\otimes Q_{\lambda_2})|u\rangle\otimes|I_{\lambda_1}\rangle\rangle\neq 0$ である．したがって，(2.37) で与えた線型写像は 0 でない G の表現空間として準同型写像である．さらに，既約性から同型写像となる．

(2) については，自明である．□

なお，f_λ, $\mathsf{f}_{\lambda'}$ が射影的（ユニタリ）表現である場合はやや注意が必要である．f_λ, $\mathsf{f}_{\lambda'}$ の因子団を $\mathcal{E},\mathcal{E}'\in H(G:U(1))$ とすると，$\mathsf{f}_\lambda\otimes\mathsf{f}_{\lambda'}$ は因子団を $\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}'\in H(G:U(1))$ とする，射影的（ユニタリ）表現となる．

2.8　有限群での Fourier 変換

2.8.1　離散 Fourier 変換

基底系 $\{|0\rangle,\ldots,|d-1\rangle\}$ から生成される d 次元ベクトル空間上 $\mathcal{H}$ のユニタリ行列 $\mathsf{DFT}:=\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{l,j\in\mathbb{F}_q}e^{i2\pi lj/d}|l\rangle\langle j|$ は**離散 Fourier 変換**とよばれ，量子情報処理で重要な役割を果たす．基底系 $|j\rangle$ を巡回群 $\mathbb{Z}_d$ の要素と見なし，巡回群 $\mathbb{Z}_d$ の表現 $\mathsf{f}(k)|j\rangle:=|j+k\rangle$ $(\forall j,k\in\mathbb{Z}_d)$ を与えると，$\mathcal{H}$ の既約分解 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_{d-1}$ を得る．ただし，$\mathcal{H}_l$ は**双対基底**

$$|\hat{e}_l\rangle:=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d}e^{-2\pi ilk/d}|k\rangle=\mathsf{DFT}^\dagger|l\rangle \tag{2.38}$$

で生成される 1 次元部分空間とする．$\mathcal{H}_l$ への作用 f_l は $\mathsf{f}_l(k)|\hat{e}_l\rangle:=e^{2\pi ilk/d}|e_l\rangle$ で与えられる．$\mathbb{Z}_d$ は可換群であるため，既約表現は 1 次元表現に限られており，これらは，$\mathsf{f}_0,\ldots,\mathsf{f}_{d-1}$ のどれかになることが容易に確認できる．したがって $\mathbb{Z}_d$ の既約表現を表すラベルの集合 $\hat{\mathbb{Z}_d}$ は $\{0,\ldots,d-1\}$ となる．$\mathsf{DFT}|v\rangle=\sum_{l=0}^{d-1}\langle\hat{e}_l|v\rangle|l\rangle$ となるので，離散 Fourier 変換は $\mathcal{H}$ 上のベクトル $|v\rangle:=\sum_{j=0}^{d-1}v_j|j\rangle$ を $\mathbb{Z}_d$ から $\mathbb{C}$ への関数 $j\mapsto v_j$ と見なすと，この関数を $\hat{U}_d$ 上の関数 $l\mapsto\langle\hat{e}_l|v\rangle$ に変換する操作と見なすことができる．この議論が一般の群の場合どのように拡張できるか，以下では調べることにする．

量子力学系での対称性を記述する群は後に述べる連続群（Lie 群）だけでなく，有限群も重要な役割を果たす．本節では，有限群の場合に表現論の観点から，離散 Fourier 変換の一般化を扱う．

2.8.2　指標と直交性

任意の有限群 G の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への表現 f は完全可約であり，既約表現の種類は有限であることが知られている．そのため，既約表現の集合を $\hat{G} = \{1, \ldots, k\}$ と記す．また，$\mathsf{f}_\lambda(g)$ がユニタリ行列になるように，$\mathcal{U}_\lambda$ の内積を選ぶことができる [25, 定理 10.1]．したがって，ユニタリ表現に限って議論する．すると，2.7 節の最初で述べた議論より，このような群の作用について考える場合，表現空間が $\mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{d_\lambda}$ で与えられる場合を考えれば十分である．本項と次の項で，この表現空間を様々な形で表す方法を扱う．数学的にはこの表現空間を別の形で表すことで，解析しやすくなることがある．

なお，一般の表現空間 $\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{m_\lambda}$ が与えられたとき，この表現空間の表現の指標は $\sum_\lambda m_\lambda \chi_\lambda$ となる．ここで $m_\lambda = 0$ の場合は，$\mathcal{H}$ の中に，$\mathcal{U}_\lambda$ と同値な既約表現が含まれていないことを意味する．この関係を用いて，以下の議論を進めることとする．

以下，有限群 G の表現の構造を見るために，有限群 G の要素 g を正規直交基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{C}[G]$ を考えよう．さらに，この空間に以下の積の構造を考え，**群環**とよぶ．

$$\left(\sum_g a_g g, \sum_g b_g g\right) \in \mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \mapsto \sum_g \sum_{g'} a_g b_{g'} g g' \in \mathbb{C}[G]. \qquad (2.39)$$

この積は結合律を満たす．また，**双線型性**（両方の引数についての線型性）を満たす．単位元 e は $\mathbb{C}[G]$ の要素として見なせ，上記の $\mathbb{C}[G]$ の積の下で単位元となる．このように，線型空間に双線型性と結合律を満たす積が定義されたものを**線型環**とよぶ．例えば，$\mathcal{U}_\lambda$ 上の線型写像の集合 $\mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ は積を合成写像で定義することにより，線型環となる．さらに，その直和 $L^2(\hat{G}) := \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ も線型環となる．線型環 V から線型環 W への線型写像 A が双線型性を満たす積の構造を保存するとき，線型写像 A は線型環としての**準同型写像**という．

この空間 $L^2(\hat{G})$ G の左からの作用に関して，$\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{d_\lambda}$ と同型である．すなわち，$L^2(\hat{G})$ は先ほど述べた表現空間 $\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{d_\lambda}$ に他ならない．

$\mathbb{C}[G]$ から $L^2(\hat{G})$ への準同型写像 f を以下で定義する．

$$\mathsf{f}\left(\sum_g a_g g\right) = \bigoplus_\lambda \sum_g a_g \mathsf{f}_\lambda(g). \tag{2.40}$$

この準同型写像は以下に示すように単射であるため，$\mathbb{C}[G]$ と $L^2(\hat{G})$ の次元を比較すると，

$$|G| \le \sum_{\lambda=1}^{k} d_\lambda^2 \tag{2.41}$$

が得られる．しかし，後の補題 2.8.1 で示すように，逆向きの不等式も成り立つので，

$$|G| = \sum_{\lambda=1}^{k} d_\lambda^2 \tag{2.42}$$

となり，$\mathbb{C}[G]$ と $L^2(\hat{G})$ は同型となる．よって，その指標は $\sum_\lambda d_\lambda \chi_\lambda$ と一致する．$g \in G$ が単位元でない場合，$\mathbb{C}[G]$ への左からの作用についての指標は 0 となる．この事実は $\mathbb{C}[G]$ の基底 $\{g'\}_{g' \in G}$ について，$gg' \neq g'$ であることから確認できる．よって，

$$\sum_\lambda d_\lambda \chi_\lambda(g) = 0 \tag{2.43}$$

を得る．

f の単射性の証明.　$\mathsf{f}(\sum_g a_g g) = 0$ とすると，$\sum_g a_g g$ の全てのユニタリ表現に対する作用は 0 行列を掛けることになる．したがって，すなわち，任意のユニタリ表現 f に対して，$\sum_g a_g \mathsf{f}(g) = 0$ となる．$\mathbb{C}[G]$ 自身も G の左からの作用に関して，表現空間と見なせるので，$\sum_g a_g g$ の $\mathbb{C}[G]$ への作用も 0 行列となる．すなわち，$\mathbb{C}[G]$ の単位元 e に対して，$\sum_g a_g g = (\sum_g a_g g)e = 0$ となる．よって f の単射性を得る．□

ここで，$\mathbb{C}[G]$ の要素 $\sum_g a_g g$ に対して，G から $\mathbb{C}$ への関数 $g \mapsto a_g$ を与えることで，$\mathbb{C}[G]$ と G から $\mathbb{C}$ への関数全体の集合 $L^2(G)$ との同型関係

を得る．$L^2(G)$ に対して内積 $\langle h_1, h_2\rangle := \sum_{g\in G} \frac{1}{|G|}\overline{h_1(g)}h_2(g)$ $(\forall h_1, h_2 \in L^2(G))$ を定義することができる．ここで，$\mathcal{U}_\lambda$ の正規直交基底 $|\lambda, j\rangle$ を選ぶ．$R_{\lambda,j',j}(g) := \langle\lambda, j'|\mathsf{f}(g)|\lambda, j\rangle$ を定義すると，$R_{\lambda,j',j} \in L^2(G)$ となる．一般に，G のユニタリ表現 f と表現空間上の行列 A が与えられたとき，

$$\sum_{g\in G} \mathsf{f}(g)^{-1}A\mathsf{f}(g) \tag{2.44}$$

は任意の $\mathsf{f}(g')$ と可換となる．この事実を用いることで以下の **Plancherel の公式**が示せる．

補題 2.8.1　以下の直交性が成り立つ．

$$\sum_{g\in G} \frac{1}{|G|}\overline{R_{\lambda,j,j'}(g)}R_{\tilde{\lambda},\tilde{j},\tilde{j}'}(g) = \frac{1}{d_\lambda}\delta_{\lambda,\tilde{\lambda}}\delta_{j,\tilde{j}}\delta_{j',\tilde{j}'}. \tag{2.45}$$

証明.　以下，空間 $\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ の内積が異なる $\lambda, \tilde{\lambda}$ について，空間 $\mathcal{U}_\lambda$ と空間 $\mathcal{U}_{\tilde{\lambda}}$ は互いに直交するように選び，$\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ 上の行列を扱う．また，$\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ への G のユニタリ表現を $\tilde{\mathsf{f}}$ と記す．

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G} \frac{1}{|G|}\overline{R_{\lambda,j,j'}(g)}R_{\tilde{\lambda},\tilde{j},\tilde{j}'}(g) &= \sum_{g\in G} \frac{1}{|G|}\langle\lambda; j'|\mathsf{f}_\lambda(g)^{-1}|\lambda, j\rangle\langle\tilde{\lambda};\tilde{j}|\mathsf{f}_{\tilde{\lambda}}(g)|\tilde{\lambda};\tilde{j}'\rangle \\ &= \langle\lambda; j'|\left(\sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\tilde{\mathsf{f}}(g)^{-1}|\lambda; j\rangle\langle\tilde{\lambda};\tilde{j}|\tilde{\mathsf{f}}(g)\right)|\tilde{\lambda};\tilde{j}'\rangle\end{aligned}$$

となる．$\left(\sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\tilde{\mathsf{f}}(g)^{-1}|\lambda, j\rangle\langle\tilde{\lambda};\tilde{j}|\tilde{\mathsf{f}}(g)\right)$ は $\tilde{\mathsf{f}}(g)$ と可換である．よって，Schur の補題より，この行列は $\bigoplus_{\lambda'} c_{\lambda'}I_{\lambda'}$ と書ける．$I_{\lambda'}$ は $\mathcal{U}_{\lambda'}$ 上の単位行列である．$\lambda \neq \tilde{\lambda}$ のとき，$|\lambda; j\rangle$ と $|\tilde{\lambda};\tilde{j}\rangle$ は直交するので，この値は 0 である．

$\lambda = \tilde{\lambda}$ のとき，トレースに注意すると，

$$\left(\sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\tilde{\mathsf{f}}(g)^{-1}|\lambda; j\rangle\langle\tilde{\lambda};\tilde{j}|\tilde{\mathsf{f}}(g)\right) = \frac{\langle\tilde{\lambda};\tilde{j}|\lambda; j\rangle}{d_\lambda}I_\lambda$$

となる．よって，(2.45) を得る．　□

$R_{\lambda,j,j'} \in L^2(G)$ であるから，この事実は，$\dim L^2(G) \geq \sum_\lambda d_\lambda^2$ となるこ

とを意味している．$L^2(G)$ と $\mathbb{C}[G]$ の同型性から (2.41) の逆向きの不等式を得る．よって，$R_{\lambda,j,j'}$ は $L^2(G)$ の正規直交基底となる．

補題 2.8.1 で扱った直交性について，行列 $R_{\lambda,j,j}$ のトレースを考えることにより，以下の指標の直交性を得る．

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\chi_{\lambda'}(g)\chi_{\lambda}(g^{-1}) &= \sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\chi_{\lambda'}(g)\overline{\chi_{\lambda}(g)} \\ &= \sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\chi_{\lambda'}(g)\chi_{\lambda^*}(g) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda=\lambda' \\ 0 & \text{if } \lambda\neq\lambda' \end{cases} \end{aligned} \tag{2.46}$$

同様に，

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G}\frac{d_\lambda}{|G|}\mathsf{f}_{\lambda'}(g)\chi_{\lambda}(g^{-1}) &= \sum_{g\in G}\frac{d_\lambda}{|G|}\mathsf{f}_{\lambda'}(g)\overline{\chi_{\lambda}(g)} \\ &= \sum_{g\in G}\frac{d_\lambda}{|G|}\mathsf{f}_{\lambda'}(g)\chi_{\lambda^*}(g) = \begin{cases} I_\lambda & \text{if } \lambda=\lambda' \\ 0 & \text{if } \lambda\neq\lambda' \end{cases} \end{aligned} \tag{2.47}$$

を得る．

直交性 (2.46) より，ユニタリ表現 f の表現空間 $\mathcal{H}$ が $\oplus_{\lambda\in\hat{G}}\mathcal{U}_\lambda\otimes\mathbb{C}^{m_\lambda}$ で与えられているとき，

$$\sum_{g\in G}\frac{|\mathsf{f}(g)|^2}{|G|} = \sum_{\lambda\in\hat{G}} m_\lambda \tag{2.48}$$

を得る．したがって，以下の補題を得る．

補題 2.8.2　表現 f について，以下は同値である．

(1)　f は既約表現である．

(2)　$\sum_{g\in G}\frac{|\mathsf{f}(g)|^2}{|G|}=1$.

ここで，直交性 (2.46) を用いると，(2.32) で与えた係数 $C_{\lambda,\lambda'}^{\lambda''}$ は以下で与えられる．

$$C_{\lambda,\lambda'}^{\lambda''} = \sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\chi_{\lambda}(g)\chi_{\lambda'}(g)\overline{\chi_{\lambda''}(g)} = \sum_{g\in G}\frac{1}{|G|}\chi_{\lambda}(g)\chi_{\lambda'}(g)\chi_{\lambda''^*}(g) \tag{2.49}$$

したがって，右辺に注目すると，

$$C_{\lambda,\lambda'}^{\lambda''} = C_{\lambda,\lambda''^*}^{\lambda'^*} = C_{\lambda',\lambda''^*}^{\lambda^*} \tag{2.50}$$

を得る．

また，(2.42),(2.43) より，もう 1 つの直交性

$$\sum_\lambda \frac{d_\lambda}{|G|} \mathrm{Tr}(\mathsf{f}_\lambda(g))^\dagger \mathsf{f}_\lambda(g') = \sum_\lambda \frac{d_\lambda}{|G|} \mathrm{Tr}\, \mathsf{f}_\lambda(g^{-1}g')$$
$$= \sum_\lambda \frac{d_\lambda}{|G|} \chi_\lambda(g^{-1}g') = \begin{cases} 1 & \text{if } g = g' \\ 0 & \text{if } g \neq g' \end{cases} \tag{2.51}$$

を得る．

さらに，$L^2(G)$ の要素 f で，関数の値 $f(g)$ が g の共役類でのみ決まる f の集合を $L^2(G, inv)$ と表す．すなわち，$L^2(G)$ の要素で，(2.18) を満たす関数の集合を $L^2(G, inv)$ とする．特に，(2.18) を満たす実数値関数の集合を $L^2(G, inv, \mathbb{R})$ とする．このとき，以下の補題が成り立つ．

補題 2.8.3　$L^2(G, inv)$ の正規直交基底は既約指標の集合 $\{\chi_\lambda\}_\lambda$ で与えられる．特に，$L^2(G, inv, \mathbb{R})$ の正規直交基底は既約指標の集合 $\{\chi_\lambda + \chi_{\lambda^*}\}_\lambda$ で与えられる．

2.8.3　Fourier 変換

次に，$L^2(\hat{G}) = \bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ の任意の要素 $A = (A_1, \ldots, A_k), B = (B_1, \ldots, B_k)$ に対して，内積 $\langle A, B\rangle_{L^2(\hat{G})} := \sum_{\lambda=1}^k \mathrm{Tr}\, A_\lambda^\dagger B_\lambda$ を定義する．すると，$\phi \in L^2(G)$ に対して，その **Fourier 変換** $\mathcal{F}[\phi] = (\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_k) \in L^2(\hat{G})$ が $(\mathcal{F}[\phi])_\lambda := \sqrt{d_\lambda} \sum_{g\in G} \frac{1}{|G|} \mathsf{f}_\lambda(g)^\dagger \phi(g)$ で定義できる．そして，$\phi \in L^2(G)$ に対して，(2.51) より，$\|\phi\|_{L^2(G)} = \|\mathcal{F}\phi\|_{L^2(\hat{G})}$ が成り立つ．さらに，$A \in L^2(\hat{G})$ に対して**逆 Fourier 変換** $\mathcal{F}^{-1}A$ を $\mathcal{F}^{-1}[A](g) := \sum_\lambda \sqrt{d_\lambda}\, \mathrm{Tr}\, \mathsf{f}_\lambda(g) A_\lambda$ で定義すると，(2.51) より，

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}[\phi] = \phi \tag{2.52}$$

を得る．したがって，G の表現が与えられた場合，任意のベクトルの振る舞い

は，Fourier 変換によって，$L^2(G)$ の要素として記述できることを示している．この性質は，群作用の推定（同定）で重要な役割を果たす．

これまでの本節の議論は，射影的表現の場合には以下のように拡張できる．因子団 $\mathcal{E} := [\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}] \in H(G : U(1))$ に注目し，(2.39) で定義した群環の積を以下のように変更する．

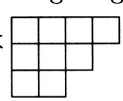
$$\left(\sum_g a_g g, \sum_g b_g g\right) \in \mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \mapsto \sum_g \sum_{g'} a_g b_{g'} e^{i\theta(g,g')} gg' \in \mathbb{C}[G]. \tag{2.53}$$

既約な射影的表現の集合 $\hat{G}[\mathcal{E}]$ を用いて，ベクトル空間 $L^2(\hat{G}[\mathcal{E}]) := \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}[\mathcal{E}]} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ を与える．すると，(2.40) と同様に $\mathbb{C}[G]$ から $L^2(\hat{G}[\mathcal{E}])$ への準同型写像 f が定義でき，同様に不等式 (2.41) も成立する．(2.44) で与えた量と $\mathsf{f}(g)$ との可換性も示せるため，Plancherel の公式である補題 2.8.1 が示せる．したがって，等式 (2.42) も成り立つ．同様に，Plancherel の公式から等式 (2.46), (2.47), (2.48), (2.51) および補題 2.8.2 が示せる．そして，同様に Fourier 変換と逆 Fourier 変換が定義できる．(2.51) が成立するので，(2.52) が成り立つ．すなわち，本節の全ての議論がそのまま射影的ユニタリ表現の場合に拡張できる．

2.9　置換群の表現と Young diagram

2.9.1　Young diagram と Young tableau

1 から n までの数字を入れ替える操作を置換とよぶ．置換全体は群（**置換群**）となり，S_n と記す．その位数は $n!$ となる．このような群は，n 個の同じ種類の粒子が与えられたとき，その順序を入れ替えるという操作を考えることで，自然に量子系に現れる．

n 次の置換群 S_n の表現のために最も重要な概念は Young diagram と Young tableau である．深さ r の **Young diagram** とは  のように r 個の行からなるもので，（今の場合は $r = 3$）第 i 行には n_i 個の箱が並ぶものである．ここで，$\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ は単調減少となる r 個の非負の整

数である．この Young diagram は $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ で記述される．そして，$|\boldsymbol{n}| := \sum_{j=1}^{r} n_j$ をその大きさとよぶ．深さ r 以下の Young diagram の集合を $\mathcal{Y}^r$ で表し，大きさ n の Young diagram の集合を $\mathcal{Y}_n$ で表し，深さが r となり，大きさ n の Young diagram の集合を $\mathcal{Y}_n^r$ で表すことにする．

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&3&6&4\\\hline 7&1&8\\\cline{1-3} 5&9\\\cline{1-2}\end{array}$ のように Young diagram $\boldsymbol{n}$ の箱に 1 から $|\boldsymbol{n}|$ までの異なる数字が記入されたものを **Young tableau** とよび，T と記す．$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 9&8&6&1\\\hline 7&4&3\\\cline{1-3} 5&2\\\cline{1-2}\end{array}$ のように Young diagram $\boldsymbol{n}$ の Young tableau の中で，右方向，下方向それぞれに数字が減少しているものを **Standard Young tableau** とよび，その集合を $Y_S(\boldsymbol{n})$ で表す．

一方，$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&3&3&3\\\hline 2&2&2\\\cline{1-3} 1&1\\\cline{1-2}\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&3&2&2\\\hline 2&2&1\\\cline{1-3} 1&1\\\cline{1-2}\end{array}$ のように，Young diagram $\boldsymbol{n}$ の箱に重複を許して，右方向には単調減少に，下方向には狭義単調減少に数字が記入されたものを **Semistandard Young tableau** とよぶ．Semistandard Young tableau は一般に Young tableau とはならないことに注意．Young diagram $\boldsymbol{n}$ の箱に 1 から r まで数字が記入された Semistandard Young tableau の集合を $Y_{U,r}(\boldsymbol{n})$ と記す．

深さ r，大きさ n の Young diagram の数 $|\mathcal{Y}_n^r|$ の評価は比較的容易である．n_i が単調減少であるという条件を外した場合，非負の整数列 $(n_1, \ldots, n_r)$ の個数は $\binom{n+r-1}{r-1}$ となり，$(n+1)^{r-1}$ 以下となる．しかし，n_i が単調減少という条件が課されるので，以下が成り立つ．

$$|\mathcal{Y}_n^r| \le \binom{n+r-1}{r-1} \le (n+1)^{r-1}. \tag{2.54}$$

逆に，単調減少であるという条件を外した場合での重複は，高々 $r!$ であるので，

$$|\mathcal{Y}_n^r| \ge \binom{n+r-1}{r-1} \Big/ r! \tag{2.55}$$

が成り立つ．

次に，深さに関する条件を外し，大きさ n の Young diagram の数 $|\mathcal{Y}_n|$ について考えよう．この数は，Partition function とよばれ，古くから研究されている．n が大きい場合については以下の漸近公式 (Hardy-Ramanujan-Rademacher の公式) が知られている [40, 41][42, p.169][43, p.925].

$$|\mathcal{Y}_n| \cong \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right). \tag{2.56}$$

2.9.2　置換群と Young diagram

置換 $\sigma \in S_n$ が Young tableau T について，水平方向にのみ数字を置換する場合，Young tableau T の水平置換とよぶ．同様に，置換 $\sigma \in S_n$ が垂直方向にのみ数字を置換する場合，Young tableau T の垂直置換とよぶ．水平置換の集合，および垂直置換の集合は S_n の部分群となり，水平置換群，垂直置換群とよび，$H(T), V(T)$ と記すことにする．

ここで，大きさ n の Young tableau T に対して，$\mathbb{C}[S_n]$ の要素として，Young 水平対称子 $c_T^H := \sum_{\sigma\in H(T)} \sigma$, Young 垂直対称子 $c_T^V := \sum_{\sigma\in V(T)} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$ を定義する．なお，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は以下のように定義される．置換の中でも，2つの数字のみ入れ替えるものを互換とよぶ．j と j' のみ入れ替える互換は (j, j') と記す．任意の置換 $\sigma \in S_n$ は互換の積で表せる．σ を互換の積で表した場合，その数が偶数である場合，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ とし，奇数である場合，$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ とする．この定義は，σ の互換の積による分解に依存しないことが示せる．また，$c_T := c_T^H c_T^V$ を Young 対称子とよぶ．

そして，$\mathbb{C}[S_n]c_T := \{xc_T \mid x \in \mathbb{C}[S_n]\}$ は群 S_n の左からの作用に関して，S_n の既約な表現空間となることが知られている．この空間への表現は Young diagram $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ にのみ依存し，Young tableau T のとり方に依存しない．そのため，この表現と同値な表現空間を $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ と記すことにする．ここで新たなベクトル $\boldsymbol{\delta}$ を $\boldsymbol{\delta} := (r-1, r-2, \cdots, 0)$ で定義する．そして，r 次元のベクトル $\boldsymbol{v} := (v_1, \cdots, v_r)$ に対する置換群の要素 $\sigma \in S_r$（S_n ではない）の作用を $\sigma(\boldsymbol{v}) := (v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(r)})$ で定義する．自然数に値を持つ r 次元のベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して，$\boldsymbol{n}! := n_1! \cdots n_r!$ を定義する．すると，$\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ の次元は Young diagram $\boldsymbol{n}$ に対応する Standard Young tableau の数と等しく，以下で与えられることが知られている [8, Corollary 9.1.5].

$$d_{S_n,\boldsymbol{n}} := \dim \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n) = \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{n!}{[\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\delta} - \sigma(\boldsymbol{\delta})]!} \tag{2.57}$$

$$= \frac{n!}{(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\delta})!} \prod_{i,j:i<j} (n_i - n_j + j - i). \tag{2.58}$$

ただし，(2.57) での $\sum$ は $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\delta} - \sigma(\boldsymbol{\delta})$ の全ての要素が正の値をとる $\sigma \in S_r$ に限ることとする．

ここで，Young diagram $\boldsymbol{n}$ のその縦と横をひっくり返して得られる Young diagram を $\boldsymbol{n}^T$ としよう．すると，$\boldsymbol{n}$ に対応する Standard Young tableau は $\boldsymbol{n}^T$ にも対応するするので，

$$\dim \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n) = \dim \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}^T}(S_n) \tag{2.59}$$

が成り立つ．

2.9.3 Plancherel 測度

置換群 S_n の位数が $n!$ であることに注意して，公式 (2.42) を用いて，**Plancherel 測度** $\mu_n(r) := \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{Y}_n : n_1 = r} \frac{d^2_{S_n,\boldsymbol{n}}}{n!}$ を定義しよう．(2.59) より，$\mu_n(r) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{Y}_n : n_1 = r} \frac{d^2_{S_n,\boldsymbol{n}^T}}{n!} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{Y}_n^r} \frac{d^2_{S_n,\boldsymbol{n}}}{n!}$ となる．すなわち，$\mu_n(r)$ は確率 $\frac{d^2_{S_n,\boldsymbol{n}}}{n!}$ の下で深さが r 以下の Young diagram の割合を表している．

以下，R を Plancherel 測度 μ_n に従う確率変数として考える．すると，$n \to \infty$ の極限において，確率変数 $\frac{R}{\sqrt{n}}$ は 2 に確率収束する．より詳しくは，確率変数 $R - 2\sqrt{n}$ は以下に述べるように $n^{1/6}$ のオーダーで振る舞う．関数 u を Painlevé II 微分方程式: $\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 2u(x)^3 + xu(x)$ の解として定義すると，Tracy-Widom 分布関数 [35]: $F_{TW}(t) := \exp(-\int_t^\infty (x-t)u(x)^2 dx)$ が定義できる．この分布関数を用いると，Plancherel 測度 μ_n の漸近的挙動が以下のように与えられる [4].

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n \left\{ r \middle| \frac{r - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \le t \right\} = F_{TW}(t). \tag{2.60}$$

第 3 章

Lie 群と Lie 環の表現論の基礎

3.1 Lie 群

3.1.1 基本的な例

群の例として，2 次元空間内での回転の集合

$$\mathrm{SO}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| 0 \le \theta < 2\pi \right\} \tag{3.1}$$

を考えよう．この群は，2 次元の直交行列のうちその行列式が 1 となる 2 次元正方行列の集合として表される．この群の要素は連続したパラメータ θ でパラメトライズされる．このように，その要素が連続したパラメータ θ でパラメトライズされる群のことを **Lie 群**とよぶ．一般に，d 次元実ベクトル空間での直交行列からなる群を $\mathrm{O}(d,\mathbb{R})$ と記し，直交群とよぶ．$\mathrm{O}(d,\mathbb{R})$ に含まれる行列 g の行列式は 1 または -1 に限られる．特に，行列式が 1 となる $\mathrm{O}(d,\mathbb{R})$ の要素の集合は部分群となり $\mathrm{SO}(d,\mathbb{R})$ と記し，特殊直交群とよぶ．量子系での変換として重要なものとして，3 次元空間での回転が挙げられるが，その集合は $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ で与えられる．

行列式は行列に関する連続関数であるので，$\mathrm{O}(d)$ の中で，その行列式が 1 となる行列の集合と -1 となる行列の集合は完全に分離している．逆に，$\mathrm{SO}(d)$ の要素の行列式が 1 であり，全ての要素が連続的に繋がっている．そのような

Lie 群のことを連結 Lie 群とよぶ．一般の Lie 群は必ずしも連結とは限らず，複数の連結成分からなる．例えば，$\mathrm{O}(d)$ はその行列式が 1 となる連結成分と，その行列式が -1 となる連結成分に分かれる．特に，一般の Lie 群 G に対して，その単位元を含む連結成分を G_0 と表す．例えば，$\mathrm{O}(d)_0 = \mathrm{SO}(d)$ である．そして，以下の補題が成り立つ．

補題 3.1.1　Lie 群 G の単位元 e を含む連結成分 G_0 は Lie 群となる．したがって，$g, g' \in G_0$ について，$gg' \in G_0$ となる．

d 次元実ベクトル空間での一般の座標変換は，可逆な d 次の実正方行列で与えられる．このような行列の集合は群となり，一般線型群とよばれ，$\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ と記される．さらに，複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の可逆線型写像の集合は $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ と記される．$\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ の要素で，その行列式が 1 となる行列の集合も群となり，特殊線型群とよばれ，$\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ と記される．

$\mathrm{O}(d)$ や $\mathrm{SO}(d)$ は有界閉集合であり，そのような集合はコンパクトとよばれる．$\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ や $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ は有界ではないので，コンパクトではない．コンパクトでない Lie 群をコンパクトは Lie 群から区別するため，このような Lie 群を**コンパクト Lie 群**とよぶ．実は，コンパクト Lie 群は，$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の部分群と同型であることが知られている [20, 定理 4.14]．また，コンパクトでない一般の Lie 群の場合でも，その構造のうち，かなりの部分は単位元の近傍の構造で決まってしまう．しかも，局所的には，一般の Lie 群でも必ず $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の部分群と同型となることが知られている [20, 定理 5.63]．したがって，本書では特に断らない限り，$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の部分群として与えられる Lie 群を扱う．

一般に，物理的な変換は，回転に代表される線型変換に限られない．例えば，3 次元空間において，粒子の位置を動かすことも変換の一種である．そのような変換のなす群は単純に 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ で表すことができる．3 次元系での回転と移動を組み合わせた変換を考えることができる．ここでは，一般的に d 次元特殊直交群 $\mathrm{SO}(d,\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^d$ の組み合わせを考える．この場合，$\mathrm{SO}(d,\mathbb{R})$ が施す変換と $\mathbb{R}^d$ が施す変換は全く独立ではなく，影響を及ぼし合う．位置 $x \in \mathbb{R}^d$ にある粒子に対して，移動 $a' \in \mathbb{R}^d$ と回転 $g' \in \mathrm{SO}(d,\mathbb{R})$ の組み合わせを施すと，その位置は，以下のように変換される．

$$x \mapsto (g', a')x := g'(x) + a'. \tag{3.2}$$

この変換の後に，移動 $a \in \mathbb{R}^d$ と回転 $g \in \mathrm{SO}(d, \mathbb{R})$ の組み合わせを施すと，以下のように変換される．

$$g'x + a' \mapsto (g, a)(g'x + a') = g(g'(x) + a') + a = gg'(x) + ga' + a. \quad (3.3)$$

したがって，(g, a) と (g', a') の積を $(g, a)(g', a') := (gg', ga' + a)$ と定義して，群を定義すると，上述の変換はこの群による自然な変換となる．なお，ここで定義した群は，$\mathbb{R}^d$ と $\mathrm{SO}(d, \mathbb{R})$ の半直積 $\mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d, \mathbb{R})$ であることに注意しよう．そのような群はユークリッド群とよばれる．同様に，$\mathbb{R}^d$ と $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ の半直積 $\mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ はアファイン群とよばれ，$\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ と記す．

3 次元空間に加え，時間軸まで含めた回転を考えると，4 次元時空での回転となる．特殊相対性理論に基づくと，そのような回転は Lorentz 変換で与えられる．すなわち，Lorentz 変換のなす群は，以下で与えられ，Lorentz 群とよばれる．

$$\mathrm{O}(1, 3) := \left\{ g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \mid g^T I_{1,3} g = I_{1,3} \right\}, \quad (3.4)$$

$$I_{1,3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

一般に，最初の p 個の対角成分が 1 であり，残りの q 個の対角成分が -1 となる $p+q$ 次の対角行列を $I_{p,q}$ と記す．Lorentz 群は 4 つの連結成分に分かれ，そのそれぞれは，以下の行列のうちの 1 つを含む．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

特に，重要なのが，単位元を含む連結成分 $\mathrm{O}(1, 3)_0 = \mathrm{SO}(1, 3)_0$ である．ただ，3 次元空間内での回転まで含めて扱うには困難を伴うので，2 次元空間 +1 次元時間に限った場合を考えよう．この場合，Lorentz 群は以下に制限される．

$$\mathrm{O}(1, 2) := \left\{ g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \mid g^T I_{1,2} g = I_{1,2} \right\}. \quad (3.7)$$

$I_{1,2}$ については，$I_{1,3}$ と同じように定義する．この場合でも重要なのが，単位元を含む連結成分 $\mathrm{O}(1,2)_0 = \mathrm{SO}(1,2)_0$ である．

このように，物理的には，SO(3) や $\mathrm{SO}(1,2)_0$ が重要であるが，これらは，3次の平方行列であるため，その取り扱いがやや複雑である．できれば，2次の平方行列で同様の変換を取り扱うことができるのであれば，数学的な計算の手間などを考慮に入れると色々と都合がよい．

そのために，可逆な d 次の複素正方行列の集合を $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ と記し，その中で，その行列式が1となる行列の集合を $\mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ と記す．さらに，d 次の複素ユニタリ行列の集合を $\mathrm{U}(d)$ と記し，$\mathrm{SU}(d) := \mathrm{U}(d) \cap \mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ とする．また，$\mathrm{U}(p,q) := \{g \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C}) | gI_{p,q}g^\dagger = I_{p,q}\}$, $\mathrm{SU}(p,q) := \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ と定義する．実は，SO(3) や $\mathrm{SO}(1,2)_0$ は SU(2), SU(1,1) と関係が深い．具体的には以下の同型関係が存在する．

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2, \quad \mathrm{SO}(1,2)_0 \cong \mathrm{SU}(1,1)/\mathbb{Z}_2. \tag{3.8}$$

しかも，正規部分群 $\mathbb{Z}_2$ は SU(2), SU(1,1) に行列 $\pm I$ として含まれるので，SU(2), SU(1,1) は SO(3), $\mathrm{SO}(1,2)_0$ の中心拡大となる．したがって，2.4.2項の冒頭の議論から，SO(3), $\mathrm{SO}(1,2)_0$ の射影的表現と SU(2), SU(1,1) の射影的表現との間には1対1の対応関係があるので，SU(2), SU(1,1) の議論に置き換えることができる．

$\mathrm{SL}(2,C)$ と $\mathrm{SO}(1,3)_0$ の間にも以下のように同じ関係が成り立つ．

$$\mathrm{SO}(1,3)_0 \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2. \tag{3.9}$$

3.1.2　解析力学に現れる対称性

次に，解析力学に現れる対称性について扱おう．解析力学では r 個の自由度のある力学系を扱う場合，そのそれぞれに，共役なパラメータを考える．そのため，$2r$ 個のパラメータ $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := (q^1,\ldots,q^r,p^1,\ldots,p^r)$ を扱うことになる．このような系で許される変換はシンプレクティク変換とよばれ，$\mathrm{GL}(2r,\mathbb{R})$ の要素 g で以下を満たすものである．

$$gJ_rg^T = J_r. \tag{3.10}$$

ここで，J_n は先の章の (2.30) で定義したものである．この条件は，シンプレクティク内積 $\langle(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')\rangle := \boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}'$ を用いると，以下のように書

き換えることができる.

$$\langle(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')\rangle = \langle g(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),g(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')\rangle. \tag{3.11}$$

この条件を満たす $\mathrm{GL}(2r,\mathbb{R})$ の要素 g の集合はシンプレクティク群とよばれ, $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ と記される.

この条件がなぜ現れるのか量子論の立場から考えてみよう. 簡単のため $r=1$ の場合を扱う. 空間 $\mathbb{R}^2$ の要素を移動させる変換からなる群は $\mathbb{R}^2$ 自身と見なすことができる. すると, 量子系で群 $\mathbb{R}^2$ を扱うには, $\mathbb{R}^2$ のユニタリ表現ではなく, $\mathbb{R}^2$ の射影的ユニタリ表現を扱う必要がある. その射影的ユニタリ表現を扱うには, $\mathbb{R}^2$ による $\mathrm{U}(1)$ の中心拡大を考える必要が生じる. $\mathbb{R}^2$ による $\mathrm{U}(1)$ の中心拡大は, 後の3.3.3項で示すように, λ を用いて, 以下で積を定義したものに限られる. $(q,p,e^{i\theta}),(q',p',e^{i\theta'})\in\mathbb{R}^2\cdot\mathrm{U}(1)$ に対して,

$$(q,p,e^{i\theta})\cdot(q',p',e^{i\theta'}) = (q+q',p+p',e^{i(\theta+\theta'+\lambda\langle(p,q),(p',q')\rangle/2)}) \tag{3.12}$$

を満たす. すなわち, 因子団 $e^{i\lambda\langle(p,q),(p',q')\rangle/2}$ を持つ射影的表現は, 上記の $\mathbb{R}^2$ による $\mathrm{U}(1)$ の中心拡大の表現から得られる. しかし, パラメータ λ の値に応じて, 異なる中心拡大を考えるのは, わずらわしいので, $\mathbb{R}^2$ による $\mathbb{R}$ の中心拡大を考えることにする. すなわち, $\mathbb{R}^2\cdot\mathbb{R}$ に対して, 以下で積を定義した $\mathbb{R}^2$ による $\mathbb{R}$ の中心拡大を考えることにする. $(q,p,\theta),(q',p',\theta')\in\mathbb{R}^2\cdot\mathbb{R}$ に対して,

$$(q,p,\theta)\cdot(q',p',\theta') = (q+q',p+p',\theta+\theta'+\langle(p,q),(p',q')\rangle/2) \tag{3.13}$$

を満たす. この群を1自由度の Heisenberg 群とよび, $\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ と記す. すると, 任意の $\mathbb{R}^2$ の射影的表現は1自由度の Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ の表現から得られる. 例えば, 因子団 $e^{i\lambda\langle(p,q),(p',q')\rangle/2}$ を持つ射影的表現 f は, Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ の表現 $(q,p,\theta)\mapsto\mathsf{f}(q,p)e^{i\lambda\theta}$ から得られる.

ここで, $g\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ に対して, $g(q,p,\theta):=(g(q,p),\theta)$ とすると,

$$g(q,p,\theta)\cdot g(q',p',\theta') = g((q,p,\theta)\cdot(q',p',\theta')) \tag{3.14}$$

を満たす g は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の要素に限られる. すなわち, $\mathbb{R}^2$ の任意の射影的表現の下で, 積演算を保存するには, 線型な変換を $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の要素に限る必要がある.

一般の場合，すなわち，$\mathbb{R}^{2r}$ による $\mathrm{U}(1)$ の拡大は，$2r$ 次の正方行列 λ を用いて，以下で積を定義したものに限られる．$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},e^{i\theta}),(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}',e^{i\theta'})\in\mathbb{R}^{2r}\cdot\mathrm{U}(1)$ に対して，

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},e^{i\theta})\cdot(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}',e^{i\theta'})=(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}',e^{i(\theta+\theta'+\langle\lambda(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),\lambda(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')\rangle/2)}) \quad (3.15)$$

を満たす．この場合，行列 λ が可逆であれば，適切な座標変換を用いると，以下の積に帰着できる．

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},e^{i\theta})\cdot(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}',e^{i\theta'})=(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}',e^{i(\theta+\theta'+\langle(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')\rangle/2)}). \quad (3.16)$$

この場合も同様に，$\mathbb{R}^{2r}$ による $\mathbb{R}$ の中心拡大を考えることにする．すなわち，$\mathbb{R}^{2r}\cdot\mathbb{R}$ に対して，以下で積を定義した $\mathbb{R}^{2r}$ による $\mathbb{R}$ の中心拡大を考えることにする．$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\theta),(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}',\theta')\in\mathbb{R}^{2}\cdot\mathbb{R}$ に対して，

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\theta)\cdot(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}',\theta')=(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}',\theta+\theta'+\langle(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}')\rangle/2) \quad (3.17)$$

を満たす．この群を r 自由度の Heisenberg 群とよび，$\mathrm{H}(2r,\mathbb{R})$ と記す．したがって，上記の拡大に対応する射影的表現の下で，積演算を保存するには，線型な変換を $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の要素に限る必要がある．このように，射影的表現を考えることで，線型変換はシンプレクティク変換に限られる．

したがって，空間 $\mathbb{R}^{2r}$ の要素を移動させる変換と上記の線型変換からなる群を扱うには，半直積 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R})\rtimes\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ を扱えば十分である．後の第7章では，この群のユニタリ表現を扱うこととする．

3.1.3　複素 Lie 群

これまで，実数パラメータが入る Lie 群を扱ってきたが，そのような Lie 群には複素パラメータが入る（すなわち，パラメータが正則関数として入る）Lie 群が含まれる．そのような Lie 群は複素 Lie 群とよばれる．より正確には，積演算がそのパラメータについて，正則関数である群のことを**複素 Lie 群**とよぶ．一方，複素 Lie 群でない Lie 群を複素 Lie 群から区別する必要がある場合，実 Lie 群とよぶ．

複素 Lie 群は実 Lie 群に比べ，構造が単純である．これは，上述の正則性に関する条件が強いため，結果的に，複素 Lie 群は構造が単純なものに限られてしまうからである．

表 3.1 複素 Lie 群

群の名称	記号	定義
複素一般線型群	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$	$\{n\times n$ 複素正則行列$\}$
複素特殊線型群	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$	$\{g\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\mid \det g=1\}$
複素直交群	$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$	$\{g\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\mid g^Tg=I\}$
特殊複素直交群	$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})\cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$
複素シンプレクティク群	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$\{g\in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})\mid g^TJ_ng=J_n\}$

物理的に意味のある変換の多くは，複素 Lie 群とはならない，実 Lie 群で与えられる．そのため，物理的な観点からは複素 Lie 群を扱う必要性は低いように見える．しかし，実 Lie 群の構造は複雑すぎて，複素 Lie 群の解析を経由せずにそれを扱うことは困難である．

一般には，全ての実 Lie 群に対して，その複素化として対応する複素 Lie 群が存在する．しかし，複素 Lie 群に対して，対応する実 Lie 群は一意に定まらず，複数存在するので，その取り扱いは複雑である．以下，典型的な複素 Lie 群は表 3.1 でまとめられる．

3.1.4 その他の実 Lie 群の例

これまで，たくさんの実 Lie 群の例を挙げたが，他にも，たくさん実 Lie 群が存在する．ここでは，それらの例を述べるに留める．表 3.1 の複素 Lie 群に対応するコンパクト Lie 群は表 3.2（表 3.2 の最後の 2 つは表 3.1 に対応するものがない）で与えられる．なお $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は $n\times n$ の実正則行列の集合である．基本群について後の 3.6 節で定義を述べる．

表 3.2 コンパクト Lie 群

群の名称	記号	定義	次元	基本群
ユニタリ群	$\mathrm{U}(n)$	$\{g\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\mid g^\dagger g=I\}$	n^2	1
特殊ユニタリ群	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{U}(n)\cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$	n^2-1	1
実直交群	$\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})\cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	$n(n-1)/2$	非連結
実特殊直交群	$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})\cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	$n(n-1)/2$	$\mathbb{Z}_2$ $(n\geq 3)$ $\mathbb{Z}$ $(n=2)$
超ユニタリ群	$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathrm{U}(2n)\cap \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$n(2n+1)$	1
	$\mathrm{D}(n)$	$\mathrm{U}(n)$ に含まれる対角行列	n	$\mathbb{Z}_2^n$
	$\mathrm{Sd}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$ に含まれる対角行列	$n-1$	$\mathbb{Z}_2^{n-1}$

表 3.3　非コンパクト実 Lie 群

群の名称	記号	群の元	次元
実一般線型群	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	$\{n \times n$ 実正則行列 $\}$	n^2
不定値ユニタリ群	$\mathrm{U}(p,q)$	$\left\{g \,\middle|\, \begin{matrix} g \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C}), \\ g^\dagger I_{p,q} g = I_{p,q} \end{matrix}\right\}$	$(p+q)^2$
	$\mathrm{U}^*(2m)$	$\left\{g \,\middle|\, \begin{matrix} g \in \mathrm{GL}(2m,\mathbb{C}), \\ \overline{g} J_m = J_m g \end{matrix}\right\}$	$(2m)^2$
実特殊線型群	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$	n^2-1
実不定値ユニタリ群	$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathrm{SL}(p+q,\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(p,q)$	$(p+q)^2-1$
	$\mathrm{SU}^*(2m)$	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{U}^*(2m)$	$(2m)^2-1$
不定値直交群	$\mathrm{O}(p,q)$	$\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R}) \cap \mathrm{U}(p,q)$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$
特殊不定値直交群	$\mathrm{SO}(p,q)$	$\mathrm{SL}(p+q,\mathbb{R}) \cap \mathrm{U}(p,q)$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$
	$\mathrm{SO}^*(2m)$	$\mathrm{SO}(2m,\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}^*(2m)$	$m(2m-1)$
実シンプレクティク群	$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$	$n(2n+1)$
不定値シンプレクティク群	$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\mathrm{U}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{C})$	$n(2n+1)$
Heisenberg 群	$\mathrm{H}(2n,\mathbb{R})$		$2n+1$
アファイン群	$\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$		n^2+n

そして，コンパクトでない実 Lie 群の例は表 3.3 で与えられる．一般に，1 つの複素 Lie 群に対して，複数の異なるタイプのコンパクトでない実 Lie 群が対応するため，コンパクトでない実 Lie 群は表 3.3 で与えられるように複雑である．しかし，低次元の場合には，以下のように同じ群となる場合や，同型な群となる場合がある．

$$\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}). \tag{3.18}$$

3.2　Lie 環

先の節では，実 Lie 群と複素 Lie 群を扱った．複素 Lie 群の方が実 Lie 群よりも扱いが容易であると述べたが，複素 Lie 群でもまだ扱いに困難な点があ

る．実 Lie 群や複素 Lie 群は単位元の近傍の構造である程度その構造が決まってしまう．また，単位元の近傍の構造の方が，Lie 群全体の構造を扱う必要がないので，Lie 群そのものよりも構造は単純である．そのため，Lie 群を扱う前に，単位元の近傍の構造だけを扱った方が，議論が単純になる．ここで，単位元の近傍の構造を反映した概念が必要となるが，それは以下で定義する Lie 環で与えられる．とりあえず，本節では Lie 環の定義を与え，後の節で，Lie 群との関係を説明する．

実（複素）ベクトル空間 V に対して，以下の条件を満たす写像（**交換子積**とよばれる）$[,]: V \times V \to V$ が存在するとき，V は実（複素）Lie 環とよばれる[1)]．

双線型性　任意の X に対して，$Y \mapsto [X,Y]$，$Y \mapsto [Y,X]$ はともに線型写像である．

歪対称性 (skew-symmetricity)　$[X,Y] = -[Y,X]$

Jacobi 律　$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

例えば，実（複素）ベクトル空間 V 上の線型写像全体 $\mathfrak{gl}(V)$ は

$$[X,Y] := XY - YX \tag{3.19}$$

を考えると，実（複素）Lie 環になる．同様に，例えば，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の歪エルミート行列の集合 $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ も同様に，積 (3.19) に関する実 Lie 環となる．$\mathfrak{g}$ が行列からなる場合，2 つの要素 X, Y が行列として可換である場合，$[X,Y] = 0$ となる．そのため，一般の Lie 環についても，2 つの要素 X, Y が $[X,Y] = 0$ を満たすとき，X と Y は互いに**可換**であるという．なお，複素 Lie 環は実 Lie 環であるが，逆は一般には成り立たない．

そして，実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}_1$ から実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ への実（複素）線型写像 f が $[f(X), f(Y)] = f([X,Y])$, $(\forall X, Y \in \mathfrak{g}_1)$ を満たすとき，**実（複素）Lie 環としての準同型写像**という．特に，f が全単射である場合，f を同型写像という．実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}_1$ から実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ への同型写像が存在

---

1) 物理では，ここで与えた Lie 環に $\sqrt{-1}$ 倍したものを Lie 環として定義する．後に述べるように，我々の定義では，SU(d) の Lie 環は歪エルミート行列の要素として与えられる．しかし，物理の文脈では，Lie 環の要素とエルミート行列である物理量を同一視したいので，我々の定義での Lie 環の要素を $\sqrt{-1}$ 倍したものを Lie 環として定義する．

する場合，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ は互いに同型であるといい，$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ と記す．なお，本書では，特に断らない限り，Lie 環は実 Lie 環を指し，Lie 環の準同型写像は実 Lie 環としての準同型写像を指す．複素 Lie 環から複素 Lie 環への写像が，実 Lie 環としての準同型写像であっても，複素 Lie 環としての準同型写像とならない例も存在するので，注意を要する．本書では，複素 Lie 環としての準同型写像を意味する場合は，必ず，複素 Lie 環としての準同型写像と明記することにする．

2つの実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ に対して，その直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ は積 $[X_1 \oplus X_2, Y_1 \oplus Y_2] := [X_1, Y_1] \oplus [X_2, Y_2]$ の下で実（複素）Lie 環になる．また，実ベクトル空間である実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の係数を実数から複素数に拡大して得られる複素ベクトル空間は，同じ積についての複素 Lie 環になる．この複素 Lie 環を $\mathfrak{g}$ の**複素化**とよび，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と記す．なお，2つの実 Lie 環 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ について，$\mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}_{2,\mathbb{C}}$ が成り立つ場合でも，後に例を与えるように，$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ が成り立たない場合があることに注意せよ．実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ の2つの部分実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ が与えられたとき，$\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_4$ を $\{X_3 + X_4 \mid X_3 \in \mathfrak{g}_3, X_4 \in \mathfrak{g}_4\}$ とすると，$\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_4$ は $\mathfrak{g}$ の部分実（複素）Lie 環となる．特に，$\mathfrak{g}_3 \cap \mathfrak{g}_4 = \{0\}$ のとき，$\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_4$ は $\mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_4$ と同型である．

ここで，実（複素）Lie 環の大変基本的な分類を述べることにする．そのために，実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分実（複素）ベクトル空間 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対して，記号 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \{[A, B] \mid A \in \mathfrak{a}, B \in \mathfrak{b}\}$，$\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$,　$\mathfrak{g}^{(n)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$，$D^{(0)}\,\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$,　$D^{(n)}\,\mathfrak{g} := [D^{(n-1)}\,\mathfrak{g}, D^{(n-1)}\,\mathfrak{g}]$ を導入しよう．実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分実（複素）ベクトル空間 $\mathfrak{a}$ が $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ であるとき，$\mathfrak{a}$ を**部分実（複素）Lie 環**という．特に，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ であるとき，$\mathfrak{a}$ を**イデアル**という．そして，商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は実（複素）Lie 環になる．また，実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ が非自明なイデアルを持たない場合，$\mathfrak{g}$ は**単純**であるという．これは，後に述べるように，$\mathfrak{g}$ をより小さい構造に分解できないことを意味している．$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{k}$ に対して，部分ベクトル空間 $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{k}\}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環となり，$\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{g}$ に関する**中心化環**とよばれる．$\mathfrak{k}$ 自身が Lie 環 $\mathfrak{g}$ の場合，$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルとなり，$\mathfrak{g}$ の**中心**とよばれ，$\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ と記す．

一方，$\mathfrak{g}^{(1)} = 0$ であり，$\mathfrak{g}$ が行列環 $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ の部分集合である場合では，$\mathfrak{g}$ の全ての要素が通常の行列の積の意味で可換であることを意味している．したがって，$\mathfrak{g}^{(1)} = 0$ のとき，$\mathfrak{g}$ は**可換**であるという．そして，$\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ となる k が存

在するとき，$\mathfrak{g}$ は**冪零**といい，$D^{(k)}\mathfrak{g}=0$ となる k が存在するとき，$\mathfrak{g}$ は**可解**という．冪零である場合は，可換でない限り $\mathfrak{g}^{(1)}$ はイデアルになる．冪零と単純は全く正反対のいう性質と見なせる．そして，$\mathfrak{g}$ の可解となるイデアル（可解イデアル）が $\{0\}$ に限られる場合，$\mathfrak{g}$ を**半単純**という．また，$\mathfrak{g}$ が半単純でない場合でも，以下が成立する．$\mathfrak{g}$ の可解イデアルの集合 $\{\mathfrak{g}_i\}_i$ を考えると，$\bigcup_i \mathfrak{g}_i$ も可解イデアルになる．この可解イデアルは**根基** (radical) といい，$rad\,\mathfrak{g}$ と記す．すると $\mathfrak{g}/rad\,\mathfrak{g}$ は半単純になる．

半単純実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，部分単純実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}_1,\ldots,\mathfrak{g}_k$ を適切に選ぶと，$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{g}_i$ となる．したがって，半単純実（複素）Lie 環の解析は要素となる単純実（複素）Lie 環に帰着できる．

3.3 Lie 群と Lie 環の関係 I

3.3.1 無限小変換と Lie 環

3.2 節の冒頭で述べたように，実（複素）Lie 群の単位元 I の近傍での無限小変換が実（複素）Lie 環に対応する．以下，具体的にその対応関係を与える．実（複素）Lie 群 G が $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ の部分群の場合には，微分可能な 1 次元部分集合 $\{g(t)\in G|t\in\mathbb{R}\}$ （以下 G の**経路**とよぶことにする．）に対して，$g(0)=I$ となるものを考えると，$X=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-I}{t}$ で G に対応する実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}(G)$ の要素が与えられる．G に対応する Lie 環 $\mathfrak{g}(G)$ の別の定義として，$\mathfrak{g}(G):=\{X\in\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)\,|\,e^{tX}\in G,\forall t\in\mathbb{R}\}$ として定義する方法もある．ただし，$e^X:=\exp(X):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$ である．$X,Y\in\mathfrak{g}(G)$ に対して，$t\to 0$ の極限において，

$$e^{tY}e^{tX}=e^{t(X+Y)+\frac{t^2}{2}[Y,X]+O(t^3)} \tag{3.20}$$

となることから，

$$e^{tY}e^{tX}e^{-tY}e^{-tX}=e^{t^2[Y,X]+O(t^3)} \tag{3.21}$$

となることが示せる．この事実を用いると，

$$[Y,X]=\lim_{t\to 0}\frac{e^{tY}e^{tX}-e^{tX}e^{tY}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{tY}e^{tX}e^{-tY}e^{-tX}-I}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{tY}Xe^{-tY} - X}{t} \tag{3.22}$$

となり，Lie 群の積を用いて自然に Lie 環の積が導かれる．よって，上記の極限で与えられる行列 X の集合は積 (3.19) に関する実（複素）Lie 環となる．

逆に，$\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ の部分ベクトル空間となる積 (3.19) に関する実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ に注目すると，

$$G(\mathfrak{g}) := \{e^{X_1}\cdots e^{X_m} \mid X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{g}\}$$

は行列の積に関して実（複素）Lie 群になる．G がコンパクトであるときや冪零であるときは $G(\mathfrak{g}) = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ となり単純化できる．この定義では，Lie 群 $G(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ を含む $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ の $\mathcal{H}$ のとり方に依存する．すなわち，$\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{gl}(\mathcal{H}_1)$ と $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{gl}(\mathcal{H}_2)$ が Lie 環として同型であっても，Lie 群 $G(\mathfrak{g}_1)$ と $G(\mathfrak{g}_2)$ は同型とは限らない．例えば，後に述べる $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ は互いに同型であるが，SU(2) と SO(3, ℝ) は同型ではない．なお，Lie 群が群として単純である場合，対応する Lie 環は必ず単純になるが，その逆は必ずしも成立しないので注意が必要である．例えば，$\mathfrak{su}(2)$ は単純な Lie 環であるが，SU(2) は正規部分群 U_2 を持つため単純群とはならない．そして，2つの Lie 群 G, H が与えられ，それらに Lie 環 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ が対応するとき，H が G の部分群となり，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環となる．同様に，H が G の正規部分群となるとき，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．

さらに，以下の定理が成り立つ．

定理 3.3.1　Lie 群 G_1 から Lie 群 G_2 への準同型写像 f が与えられたとき，

$$f(X) := \lim_{t\to 0} \frac{f(e^{tX}) - I}{t}, \quad \forall X \in \mathfrak{g}(G_1)$$

は Lie 環 $\mathfrak{g}(G_1)$ から Lie 環 $\mathfrak{g}(G_2)$ への準同型写像である．

しかし，Lie 環の準同型写像から Lie 群の準同型写像が必ずしも導けるわけではないので注意を要する．

証明.　(3.21), (3.22) より，$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$f([X,Y]) = \lim_{t\to 0} \frac{f(e^{t^2[X,Y]}) - I}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(e^{tY}e^{tX}e^{-tY}e^{-tX}) - I}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{f(e^{tY})f(e^{tX})f(e^{-tY})f(e^{-tX}) - I}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{tf(Y)}e^{tf(X)}e^{-tf(Y)}e^{-tf(X)} - I}{t^2} = [f(X), f(Y)]$$

となり，題意を得る． □

我々にとっては，実 Lie 群の分類や特徴付けが必要であるが，このための本書での手順は以下のように要約できる．

複素 Lie 環の特徴付け	⟹	実 Lie 環の特徴付け	⟹	実 Lie 群の特徴付け

演習問題 11　上で定義した Lie 環の直和に関して，$\mathfrak{g}(G_1)\oplus\mathfrak{g}(G_2) = \mathfrak{g}(G_1\times G_2)$ を示せ．

演習問題 12　(3.20) および (3.21) を示せ．

3.3.2　具体例

3.1 節の表 3.1 で与えた複素 Lie 群に対応する複素 Lie 環は表 3.4 にまとめられる．なお，Lie 環の記号は対応する Lie 群の記号をドイツ文字に変えたもので与えられる．

表 3.2 で与えたコンパクト Lie 群に対応する実 Lie 環を表 3.5 に列挙する．後の節では，線型空間として実 Lie 環が定義されたときの実 Lie 環のコンパクト性を定義するが，この表 3.5 の例はその定義の下でコンパクトとなる．なお，$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ とする．

表 3.3 で与えた非コンパクト Lie 群に対応する実 Lie 環を表 3.6 に列挙する．

表 3.4　複素 Lie 環

Lie 環の記号	環の定義
$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\, X = 0\}$
$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$	$\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^T = -X\}$
$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$	$\{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid X^T J_n + J_n X = 0\}$

表 3.5　コンパクト実 Lie 環

Lie 環の記号	定義	次元
$\mathfrak{u}(n)$	$\{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X\}$	n^2
$\mathfrak{su}(n)$	$\mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	n^2-1
$\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$	$n(n-1)/2$
$\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ と同じ	$n(n-1)/2$
$\mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{u}(2n) \cap \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$	$n(2n+1)$
$\mathfrak{d}(n)$	$\mathfrak{u}(n)$ に含まれる対角行列	n
$\mathfrak{sd}(n)$	$\mathfrak{su}(n)$ に含まれる対角行列	$n-1$

表 3.6　非コンパクト実 Lie 環

Lie 環の記号	定義	次元
$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$	n^2
$\mathfrak{u}(p,q)$	$\{X \in \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{C}) \mid X^\dagger I_{p,q} + I_{p,q}X = 0\}$	$(p+q)^2$
$\mathfrak{u}^*(2m)$	$\{X \in \mathfrak{gl}(2m,\mathbb{C}) \mid \overline{X}J_m = J_mX\}$	$(2m)^2$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$	n^2-1
$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(p,q)$	$(p+q)^2-1$
$\mathfrak{su}^*(2m)$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}^*(2m)$	$(2m)^2-1$
$\mathfrak{o}(p,q)$	$\mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{u}(p,q)$	$(p+q)(p+q-1)/2$
$\mathfrak{so}(p,q)$	$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{u}(p,q)$	$(p+q)(p+q-1)/2$
$\mathfrak{so}^*(2m)$	$\mathfrak{so}(2m,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}^*(2m)$	$m(2m-1)$
$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$	$n(2n+1)$
$\mathfrak{sp}(p,q)$	$\mathfrak{u}(2p,2q) \cap \mathfrak{sp}(2p+2q,\mathbb{C})$	$n(2n+1)$
$\mathfrak{h}(2n,\mathbb{R})$		$2n+1$
$\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$		n^2+n

後の節では，線型空間として実 Lie 環が定義されたときの実 Lie 環の非コンパクト性を定義するが，表 3.6 の例はその定義の下で非コンパクトとなる．

ここで，$z \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \vec{z} \in \mathbb{R}^{2n}, A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ に対して，$X_h(\vec{z},z)$, $X_a(A,x)$ は以下で与えた．先と同じように，$x,y \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\vec{z} = (x_1,y_1,\ldots,x_d,y_d)^T$ とおくことにする．

$$X_h(\vec{z},z) := \begin{pmatrix} 0 & -x^T & z \\ 0 & 0_n & y \\ 0 & 0^T & 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

$$X_a(A, x) := \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

複素 Lie 環 $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$（実 Lie 環 $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$）は複素 Lie 環 $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$（実 Lie 環 $\mathfrak{so}(n)$）と同型である．そして，$p + q = n$ のとき，実 Lie 環と複素 Lie 環の間には以下の関係がある．

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{u}(p, q)_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{gl}(2m, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{u}^*(2m)_{\mathbb{C}} \\
&\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(p, q)_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{sl}(2m, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}^*(2m)_{\mathbb{C}} \\
&\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{o}(p, q)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(p, q)_{\mathbb{C}} \\
&\mathfrak{o}(2m, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(2m, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}^*(2m)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}^*(2m)_{\mathbb{C}} \\
&\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sp}(p, q)_{\mathbb{C}}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{su}(p, q)_{\mathbb{C}}$ は実 Lie 環としては同型でないが上述のようにその複素化は同型となる．$\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$ はコンパクトな実 Lie 環であり，$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{su}(p, q)_{\mathbb{C}}$ は非コンパクトな実 Lie 環であることから，$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{su}(p, q)_{\mathbb{C}}$ が $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$ と実 Lie 環として同型でないことが確認できる．このように，複素化された Lie 環が同型であっても一般にはその実 Lie 環が同型とは限らない．すなわち，実 Lie 環の方が複素 Lie 環よりも，複雑な構造を持つことを示している．

一方，低次元の場合には以下の実 Lie 環の同型関係が成り立つ．

$$\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1, 1) \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{so}(4, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \\
&\mathfrak{so}(5, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{so}(6, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(4) \\
&\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(1, 3).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

したがって，(3.25) を組み合わせると，以下の複素 Lie 環の同型関係が成り立つ．

$$\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

$$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \quad \mathfrak{so}(5,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$$

$$\mathfrak{so}(6,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \tag{3.28}$$

後に述べるように，複素単純 Lie 環は完全に分類されており，古典型とよばれる $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ と例外型とよばれる E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 に限られることが知られている．ただし，(3.28) にあるように，$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ だけは単純ではない．同様に，後に述べるように，コンパクト単純 Lie 環は複素単純 Lie 環に一意に対応するので，これについても完全に分類されている．コンパクトでない単純 Lie 環の分類も容易ではないものの完全に分類されている．

3.3.3 実 Lie 環の中心拡大

実 Lie 群に中心拡大が存在したように，実 Lie 環に対しても中心拡大を考えることができる．実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，ベクトル空間としての直和空間 $\mathbb{R}+\mathfrak{g}$ を考え，部分空間 $\mathbb{R}$ の生成元を Z とすると，$\mathbb{R}+\mathfrak{g}$ の要素は $a \in R$ と $X \in \mathfrak{g}$ を用いて，$aZ+X$ と書ける．このとき，$aZ+X, a'Z+X' \in \mathbb{R}+\mathfrak{g}$ に対して以下のように積を定義する．

$$[aZ+X, a'Z+X'] = c(X,X')Z + [X,X']. \tag{3.29}$$

ここで，c は双線型な写像で

$$c(X,X') = -c(X',X) \tag{3.30}$$

を満たす．すなわち，$\mathfrak{g}$ 上の (3.30) を満たす双線型な写像 c を用いて，直和空間 $\mathbb{R}+\mathfrak{g}$ に対して，上記の積が定義された Lie 環 $\mathfrak{g}_c$ を $\mathfrak{g}$ による $\mathbb{R}$ の中心拡大とよぶ．このとき，c が 0 でない限り，$\mathfrak{g}_c$ の中心 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_c)$ は $\mathbb{R}$ と一致する．

次に，ここで定義した，Lie 環の中心拡大が Lie 群の中心拡大から得られることを示そう．中心が U(1) を含む Lie 群 G による中心拡大を考える．中心に含まれる U(1) の生成元を Z とすると，Z は他の要素と可換であることから，$X, X' \in \mathfrak{g}(G)$ について，

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{t(aZ+X)}(a'Z+X')e^{-t(aZ+X)} - (a'Z+X')) \tag{3.31}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{tX}X'e^{-tX} - X') = c(X,X')Z + [X,X'] \tag{3.32}$$

を得る．Lie 環の性質から，c は双線型であり，条件 (3.30) を満たす．

例えば，可換 Lie 環 $\mathbb{R}^2$ の中心拡大は c として，シンプレクティク内積とある実数 λ を用いて $\lambda\langle((p,q),(p',q'))\rangle$ で与えられる．そして，可換 Lie 環 $\mathbb{R}^2$ の生成元 $Q := (1,0)$, $P := (0,1)$ は以下の関係式を満たす．

$$[Q,P] = -\lambda Z, [Q,Z] = [P,Z] = 0. \tag{3.33}$$

特に，$\lambda = 1$ のときに得られる Lie 環を自由度 1 の Heisenberg 環とよび，$\mathfrak{h}(2,\mathbb{R})$ と記す．この事実より，中心が $\mathrm{U}(1)$ を含む可換 Lie 群 $\mathbb{R}^2$ の中心拡大の積は (3.12) で与えられる．そして，Heisenberg 群 $H(2,\mathbb{R})$ の要素は実数 $\vec{z} := (p,q)$ および θ を用いて，$g_h(\vec{z},\theta) := e^{pQ-qP}e^{\theta Z}$ と記すことができる．

同じ議論から，可換 Lie 環 $\mathbb{R}^{2r}$ の中心拡大は c として，シンプレクティク内積とある行列 λ を用いて $\langle(\lambda(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),\lambda(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}))\rangle$ で与えられる．特に，λ が単位行列のときに得られる Lie 環を自由度 r の Heisenberg 環とよび，$\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})$ と記す．そして，j 番目の成分にのみ値 1 を持つ可換 Lie 環 $\mathbb{R}^2$ の要素を e_j と記す．このとき，$\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})$ は中心の生成元 Z と $Q := e_j$, $P_j := e_{r+j}$ により生成され，これらは以下の関係式を満たす．

$$[P_j,Q_{j'}] = \delta_{j,j'}Z,\ [P_j,Z] = [Q_j,Z] = [P_j,P_{j'}] = [Q_j,Q_{j'}] = 0.$$

この議論から，中心が $\mathrm{U}(1)$ を含む可換 Lie 群 $\mathbb{R}^{2r}$ の中心拡大の積は (3.15) で与えられる．そして，Heisenberg 群 $H(2,\mathbb{R})$ の要素は実数 $\vec{z} := (q_1,\ldots,q_r,p_1,\ldots,p_r)^T$ および θ を用いて，$g_h(\vec{z},\theta) := \exp(\sum_{j=1}^r p_jQ_j - q_jP_j)e^{\theta Z}$ と記すことができる．

なお，ここで扱った Lie 環 $\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})$ は冪零であるため，前の項で現れた半単純 Lie 環とは異なった扱いが必要である．

3.4 Lie 環の表現

3.4.1 実 Lie 環の表現

Lie 群の構造や表現を解析するには，Lie 環の表現の解析を経由すると大変理解しやすい．そのために，Lie 環の表現について以下で述べることにする．

本項と次の項では，実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現を扱うため，Lie 環は実 Lie 環を指すとする．初めに，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群 G の表現 f が与えられたとしよ

う．すると，$X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\mathsf{f}(X) := \lim_{t \to 0} \frac{\mathsf{f}(e^{tX}) - I}{t} \tag{3.34}$$

により，Lie 環 $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ の要素が 1 つ与えられると，定理 3.3.1 により，これは，Lie 環 $\mathfrak{g}$ から複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ への Lie 環としての準同型写像となる．一般に，Lie 環 $\mathfrak{g}$ から複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ への Lie 環としての準同型写像 f を $\mathcal{H}$ への Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**表現**とよぶ．定理 3.3.1 の後にも述べたように，Lie 群 G の表現から Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現が定まるが，後に述べるように，必ずしもその逆は成立しない．

表現を与える準同型写像が単射である場合，その表現は**忠実**という．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 f で f の像が $\mathcal{H}$ 上の歪エルミート行列からなる Lie 環 $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ に含まれるものを**歪エルミート表現**とよぶ．3.6 節で詳しく述べるように，Lie 群 G のユニタリ表現 f から導かれる Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現は歪エルミート表現である．そのため，量子論と直接関連するのは Lie 環の歪エルミート表現となる．

我々にとっては，実 Lie 群のユニタリ表現の特徴付けが必要であるが，本書での議論の手順は以下のように議論できる．

実 Lie 環の 歪エルミート表現 の特徴付け	$\Longrightarrow$	実 Lie 群の ユニタリ表現 の特徴付け

上記が量子論において，実 Lie 環の歪エルミート表現を扱う理由であるが，もう 1 つの理由がある．実 Lie 環の要素 X の表現 $\mathsf{f}(X)$ を用いて，物理量が $i\mathsf{f}(X)$ と書けることが多い．この理由から，量子論において，実 Lie 環の歪エルミート表現が重要な役割を果たす．

そして，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{H}$ への表現 f の下で，$\mathcal{H}$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{K}$ が以下の不変性条件を満たすとき，**不変部分空間**という．

不変性　$\mathsf{f}(X)u \in \mathcal{K}, \quad \forall u \in \mathcal{K}, \forall X \in \mathfrak{g}.$

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 f が以下の下で，$\mathcal{H}$ の不変部分空間がの $\{0\}$ または $\mathcal{H}$ に限られるとき，f は**既約**という．一方，$\{0\}$ または $\mathcal{H}$ 以外の不変部分空間が存在するとき，f は**可約**という．そして，不変性を上記の不変性に置き換えることで

群の場合と全く同様に Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現に対して，**分解可能性**，**分解不可能性**，**完全可約性**，**複素共役表現**，**自己共役表現**が定義できる．

なお，$\mathcal{H}$ が無限次元 Hilbert 空間の場合には，$i\mathsf{f}(X)$ が自己共役作用素になる場合，f は歪エルミート表現であると定義する．そしてこのとき，以下の Schur の補題が成り立つ．

補題 3.4.1 f を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への既約表現とする．$\mathcal{H}$ 上の行列 A に対して，

$$A\mathsf{f}(X) = \mathsf{f}(X)A, \quad \forall X \in \mathfrak{g} \tag{3.35}$$

が成り立つとき，A は定数行列である．

証明. 群の表現についての Schur の補題と全く同じように，A の固有値 c について，$A - cI$ の Kernel を考えることで示せる． □

なお補題 3.4.1 は無限次元空間 $\mathcal{H}$ 上の既約な歪エルミート表現に拡張できる．この拡張は任意の $X \in \mathfrak{g}$ について $A\exp(\mathsf{f}(X)) = \exp(\mathsf{f}(X))A$ が成り立つことに注目し，補題 2.3.2 と同様に，A や $AA^\dagger$ のスペクトル分解を考えることで示せる．

異なる 2 つの空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ への Lie 環 $\mathfrak{g}$ の 2 つの表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ が与えられたとき，以下のように，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直和空間 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ への**直和表現** $\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2$ および，テンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ への**テンソル積表現** $\mathsf{f}_1 \otimes \mathsf{f}_2$ が定義できる．

$$\mathsf{f}_1 \oplus \mathsf{f}_2(X) := \mathsf{f}_1(X) \oplus \mathsf{f}_2(X), \quad \mathsf{f}_1 \otimes \mathsf{f}_2(X) := \mathsf{f}_1(X) \otimes I + I \otimes \mathsf{f}_2(X).$$

一方，$\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ への Lie 環 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の表現 f_1 と f_2 が与えられたとき，同じように，テンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ への Lie 環 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ の表現 $\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$ が定義できる．

$$(\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2)(X_1 \oplus X_2) := \mathsf{f}_1(X_1) \otimes I + I \otimes \mathsf{f}_2(X_2), \quad \forall X_1 \oplus X_2 \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 .$$

このとき，補題 2.3.6 と同様にして，以下の補題が成り立つ．

補題 3.4.2 f_1 と f_2 が既約であるとき，表現 $\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$ も既約となる．逆に，Lie 環 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ の任意の既約表現は $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ の既約表現 $\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2$ を用いて，$\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \mathsf{f}_2$ と表すことができる．

一般に，Lie 環 $\mathfrak{g}$ が直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_l$ に分解できるとき，その既約表現は $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_l$ の既約表現 $\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_l$ を用いて，$\mathsf{f}_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} \mathsf{f}_l$ で与えられる．

3.4.2　実表現

一方，Lie 環 $\mathfrak{g}$ から実ベクトル空間 V 上の Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型写像を V への Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**実表現**とよぶ．表現空間が複素 Hilbert 空間である先に定義した表現を実表現と区別するために，複素表現とよぶ．Lie 環の実表現は実 Lie 群 G の実表現に対応するものである．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の実表現 f で f の像が V 上の反対称行列からなる Lie 環 $\mathfrak{o}(V)$ に含まれるものを**反対称表現**とよぶ．Lie 群 G の直交表現に対応するものである．実表現についても，同様に，**既約性**，**忠実性**，**分解可能性**，**分解不可能性**，**完全可約性**が定義できる．有限次元の複素表現について，**複素共役表現**を (2.29) と同じように定義する．そして，群の場合と同様に，**実表現化可能性**，**複素化可能性**を定義する．

なお，群の実表現と同じく，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の実表現の場合でも Schur の補題は成り立たない．したがって，表現 f が V 上の実表現であっても，f が既約と述べたときは，表現空間 $V \otimes \mathbb{C}$ 上の複素表現としての既約性を意味することとする．

3.4.3　複素 Lie 環としての表現

複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ については，$\mathfrak{g}$ から複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ への複素 Lie 環としての準同型写像を $\mathcal{H}$ への複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**複素 Lie 環としての表現**とよぶ．一方，複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{H}$ への表現は，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ への実 Lie 環としての準同型写像を指すので，一般には，複素 Lie 環としての表現とは限らない．複素 Lie 環としての表現についても**既約性**，**忠実性**，**分解可能性**，**分解不可能性**，**完全可約性**が定義でき，実 Lie 環の場合と同じようにして，Schur の補題が成り立つ．

3.4.4　随伴表現

表現の具体例として，実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，実（複素）ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ への実表現（複素 Lie 環としての表現）ad（**随伴表現**とよぶ）を $\mathsf{ad}(X)(Y) := [X, Y]$ で定義する．したがって，イデアルはこの随伴表現に関する不変部分空間として定義することができる．また，

$$\begin{aligned}\mathsf{ad}(X)\mathsf{ad}(Y)(Z) &= [X,[Y,Z]] = [Y,[X,Z]] + [[X,Y],Z] \\ &= (\mathsf{ad}(Y)\mathsf{ad}(X) + \mathsf{ad}([X,Y]))(Z)\end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\mathsf{ad}([X,Y]) = [\mathsf{ad}(X), \mathsf{ad}(Y)] \tag{3.36}$$

となる．特に，実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純であるために必要十分条件は随伴表現が既約であることである．例えば，$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ の部分空間であるとき，$\mathfrak{g}$ に内積 $\langle X,Y\rangle := \mathrm{Tr}\, X^\dagger Y$ を定義すると，随伴表現は歪エルミートとなる．Lie 環 $\mathfrak{gl}(r)$, $\mathfrak{sl}(r)$, $\mathfrak{u}(r)$, $\mathfrak{su}(r)$ に対して，自然な $\mathbb{C}^r$ への表現は**基本表現**とよばれ，既約表現となる．さらに，これらの群の $\mathbb{C}^r$ の n 次の対称テンソル積空間への自然な表現も既約表現となり，n 次の**対称テンソル表現**とよばれる．さらに，これらの群の $\mathbb{C}^r$ の n 次の反対称テンソルから空間への自然な表現も既約表現となり，n 次の**反対称テンソル表現**とよばれる．

次に，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群 G に対して，$\mathfrak{g}$ への**随伴表現** ad を以下で与える．すなわち，任意の $g = \exp(tX) \in G$ に対して，$\mathsf{ad}(g) := \exp(\mathsf{ad}(tX))$ と定義する．この定義は t のとり方に依存するように見えるが，3.6 節で示すように，t のとり方には依存しない．そして，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ の部分ベクトル空間として見た場合，$Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathsf{ad}(g)Y = gYg^{-1}$ が成り立つ．

3.4.5 射影的表現

実 Lie 環の表現についても，射影的表現を考えることができる．線型写像 f が以下の条件を満たすとき，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**射影的表現**とよぶ．

$$[\mathsf{f}(X), \mathsf{f}(Y)] = \mathsf{f}([X,Y]) + c(X,Y)iI. \tag{3.37}$$

ここで，$c(X,Y)$ は双線型写像で，(3.30) を満たす実数への写像である．特に，f の像が歪エルミート行列（無限次元の場合，歪自己共役作用素）の場合，線型写像 f を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**射影的歪エルミート表現**とよぶ．

このとき以下の補題が成り立つ．

補題 3.4.3 $\mathfrak{g}$ の射影的表現 f に対して，以下は同値である．

(1) (3.37) において，$c(X,Y)$ が $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ にのみ依存する．

(2) 以下を満たす表現 f' が存在する.

$$\mathsf{f}'(X) = \mathsf{f}(X) + c(X)iI \tag{3.38}$$

ただし，c は $\mathfrak{g}$ 上の線型な実数値関数である.

証明. **(2)⇒ (1)** は計算により簡単に確認できる. **(1)⇒ (2)** は以下のように示せる. 条件より，$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$c(X,Y) = c([X,Y])$ $\mathfrak{g}$ 上の線型な実数値関数 c が存在する. したがって，新たな射影的表現 f' を (3.38) を用いて定義すると f' は表現となる. □

上記の補題の条件が成り立つとき，$\mathfrak{g}$ の射影的表現 f は表現 f' に置き換えることができる. このような事実から，射影的表現 f が上記の条件を満たさないとき，**真に射影的な表現**とよぶ.

補題 3.4.4 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の有限次元空間への射影的な表現は真に射影的な表現ではない.

証明. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の有限次元空間 $\mathcal{H}$ への射影的表現 f を考える. そして，

$$\mathsf{f}'(X) := \mathsf{f}(X) - \frac{1}{\dim \mathcal{H}}(\mathrm{Tr}\, \mathsf{f}(X))I \tag{3.39}$$

は射影的表現となる. この射影的表現に対して双線型な関数 c を (3.37) に従って与える. すると，

$$[\mathsf{f}'(X), \mathsf{f}'(Y)] = \mathsf{f}'([X,Y]) + c(X,Y)iI \tag{3.40}$$

が成り立つ. しかし，左辺も，$\mathsf{f}'([X,Y])$ のそのトレースが 0 であるので，c は 0 となり，f' は表現となる. すなわち，f' は真に射影的な表現ではない. □

真に射影的な歪エルミート表現は，無限次元空間への表現に限られるので，有限次元の量子系を扱う限りにおいて，歪エルミート表現のみ扱えば十分である.

3.4.6 半直積 Lie 環と表現

Lie 群 G_2 の Lie 群 G_1 への自己同型な作用 T が与えられたとき，(2.2) にしたがって半直積 $G_1 \rtimes G_2$ が定義できる. G_1, G_2 に対応する Lie 環を $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$

としたとき，G_2 の $\mathfrak{g}_1$ への作用 T を以下で定義しよう．

$$T(g)(X_1) := \lim_{t \to 0} \frac{T(g)(e^{tX_1}) - T(g)(I)}{t}, \quad \forall g \in G_2, \forall X_1 \in \mathfrak{g}_1 .$$

$\mathfrak{g}_1$ はベクトル空間であるので，T は G_2 の $\mathfrak{g}_1$ への実表現となる．さらに，

$$T(X_2)(X_1) := \lim_{t \to 0} \frac{T(e^{tX_2})(X_1) - X_1}{t}, \quad \forall X_2 \in \mathfrak{g}_2, \forall X_1 \in \mathfrak{g}_1$$

は，Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ の $\mathfrak{g}_1$ への実表現となる．

より一般には，Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ の $\mathfrak{g}_1$ への実表現 T が与えられたとき，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の直積集合 $\mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{g}_2$ に

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] := (T(X_2)Y_1 - T(Y_2)X_1 + [X_1, Y_1], [X_2, Y_2]) \tag{3.41}$$

で積が定義されたものは Lie 環となり，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の Lie 環の半直積 $\mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2$ とよぶことにする．特に，T が 0 であるとき，半直積 $\mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2$ は直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ に一致する．例えば，Lie 環 $\mathfrak{aff}(n, \mathbb{R})$ は Lie 環の半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ で与えられる．

演習問題 13　Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ の $\mathfrak{g}_1$ への実表現 T が与えられたとき，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の直積集合 $\mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{g}_2$ に (3.41) で積が定義されたものは Lie 環となることを示せ．

一般に，Lie 環 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ の $\mathcal{H}$ への表現 f_1, f_2 が

$$[\mathsf{f}_2(X_2), \mathsf{f}_1(X_1)] = \mathsf{f}_1(T(X_2)X_1) \tag{3.42}$$

を満たすとき，半直積 Lie 環 $\mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2$ の $\mathcal{H}$ への半直積表現 $\mathsf{f}_1 \rtimes \mathsf{f}_2$ が

$$\mathsf{f}_1 \rtimes \mathsf{f}_2((X_1, X_2)) := \mathsf{f}_1(X_1) + \mathsf{f}_2(X_2) \tag{3.43}$$

で定義できる．ここで，定義した半直積表現は Lie 群の半直積表現から得られることに注意せよ．

演習問題 14　条件 (3.42) が成り立つとき，(3.43) は Lie 環の半直積 $\mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2$ の $\mathcal{H}$ への表現となることを示せ．

3.5 Killing form とコンパクト性

3.5.1 Killing form

実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，Lie 環の作用に関して不変な二次形式を定義しよう．任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して，**Killing form** $(X,Y)_{\mathfrak{g}} := \mathrm{Tr}\,\mathsf{ad}(X)\mathsf{ad}(Y)$ を定義する．すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\mathsf{ad}([X,Y])\mathsf{ad}(Z) &= \mathrm{Tr}[\mathsf{ad}(X),\mathsf{ad}(Y)]\mathsf{ad}(Z) \\ &= \mathrm{Tr}\,\mathsf{ad}(X)[\mathsf{ad}(Y),\mathsf{ad}(Z)] = \mathrm{Tr}\,\mathsf{ad}(X)\mathsf{ad}([Y,Z])\end{aligned}$$

となる．よって，Killing form は以下の結合性を満たす．

結合性　$([X,Y],Z)_{\mathfrak{g}} = (X,[Y,Z])_{\mathfrak{g}}$.

この事実より，

$$(-\mathsf{ad}(Y)X, Z)_{\mathfrak{g}} = (X, \mathsf{ad}(Y)Z)_{\mathfrak{g}} \tag{3.44}$$

が成り立つ．この性質を Lie 群に適用すると，Lie 群の作用 $\mathsf{ad}(g)$ は Killing form を保存する．すなわち，$(\mathsf{ad}(g)X, \mathsf{ad}(g)Z)_{\mathfrak{g}} = (X,Z)_{\mathfrak{g}}$ が成り立つ．

Killing form に関連する以下の補題が成り立つ．

補題 3.5.1　実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，Killing form が非退化であるための必要十分条件は $\mathfrak{g}$ が半単純であることである．

したがって，$\mathfrak{g}$ が半単純のとき，$\mathfrak{g}$ 上の線型写像 A に対して，Killing form に関する双対写像を $A^{\diamond}$ とすると，(3.44) より，

$$\mathsf{ad}(Y)^{\diamond} = -\mathsf{ad}(Y) \tag{3.45}$$

を得る．すなわち，$\mathsf{ad}(Y)$ は Killing form に関して反対称となる．

補題 3.5.2　実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純であるとき，結合性を満たす内積は Killing form の定数倍で与えられる．

補題 3.5.3　実(複素)Lie 環 $\mathfrak{g}$ が冪零である場合，Killing form は $(X,Y)_{\mathfrak{g}} = 0$ となる．また，結合性を満たす内積は必ず退化する．すなわち，ゼロでない要素 $X \in \mathfrak{g}$ で $(X,X)_{\mathfrak{g}} = 0$ となるものが存在する．

複素 Lie 環が半単純の場合，Killing form には非退化という内容以上の情報はない．しかし，半単純実 Lie 環の場合には Killing form には非退化である以上の詳しい情報がある．実ベクトル空間の場合，内積が非退化であっても，その符号に正負が混じっている場合がある．すなわち，内積に対応する行列を書いた場合，その固有値に正負が混じる場合がある．全ての固有値が正の場合，内積は正定値といい，全ての固有値が負の場合，内積は負定値という．固有値に正負が混じっている場合は，内積は不定値という．

3.5.2 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のコンパクト性

本項では，実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のコンパクト性を扱う．そのため，以下では，Lie 環，Lie 群は実 Lie 環，実 Lie 群を指すとする．はじめに，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の要素 X のコンパクト性について考える．$\{\exp(tX)\}_t$ が対応する Lie 群 G のコンパクト部分群であるとき，1 次元 Lie 群 $\{\mathsf{ad}(\exp(tX))\}_t = \{\exp(\mathsf{ad}(tX))\}_t$ もコンパクトとなる．一般には，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，Lie 群 G は一意に対応しないので，$\mathfrak{g}$ 上の行列のなす群 $\{\exp(\mathsf{ad}(tX))\}_t$ が $\mathsf{ad}(G)$ の可換なコンパクト部分群に含まれるとき，X を**コンパクト**という．

補題 3.5.4 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の要素 X について，以下は同値となる．

(1) X はコンパクトである．

(2) $\mathsf{ad}(X)$ は対角化可能であり，その固有値は純虚数となる．

(3) $\mathfrak{g}$ 上の適切な基底を選ぶと，以下のように対角化できる．

$$\mathsf{ad}(X) \cong \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & & & & & \\ -c_1 & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & c_l & & & & \\ & & & -c_l & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

証明. **(1)** のとき，$\{\exp(\mathsf{ad}(tX))\}_t$ を含む可換なコンパクト部分群に対応

する Lie 環の生成元を $\mathsf{ad}(X_1),\ldots,\mathsf{ad}(X_l)$ とするとき，ある $t_1,\ldots,t_l$ について $\exp(t_j\mathsf{ad}(X_j))$ は単位行列となる．したがって，$\mathsf{ad}(X_1),\ldots,\mathsf{ad}(X_l)$ の固有値は純虚数となり，同時に対角化可能となる．$\mathsf{ad}(X)$ は $\mathsf{ad}(X_1),\ldots,\mathsf{ad}(X_l)$ の線型和で書けるので，**(2)** を得る．

逆に，**(2)** のとき，**(1)** は自明である．また，**(2)** と **(3)** は同値である．　□

ゆえに，$X\in\mathfrak{g}$ がコンパクトであるとき，$(X,X)_{\mathfrak{g}}<0$ または $\mathsf{ad}(X)=0$ が成り立つ．

そして，$\mathfrak{g}$ が半単純であるとき，コンパクト性と Killing form の間に以下の関係が成り立つ．

定理 3.5.5　半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ について，以下の3つの条件が同値である．

(1)　Killing form が負定値である．

(2)　Killing form が不定値ではない．

(3)　$\mathfrak{g}$ の全ての要素がコンパクトである．

証明.　**(1)⇒(2)**: 自明．

(2)⇒(3): $X\in\mathfrak{g}$ は非退化であり不定値ではない内積の下で，(3.45) を満たすので，**(3)** を得る．

(3)⇒(1): $\mathsf{ad}(X)$ の固有値は純虚数であり，Killing form が非退化であるので，$\mathrm{Tr}\,\mathsf{ad}(X)$ は負の数となり **(1)** を得る．　□

そして，一般の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の要素のコンパクト性について以下の特徴付けを得る．

以下の補題が成り立つ．

定理 3.5.6　Lie 環 $\mathfrak{g}$ について，以下の3つの条件が同値である．

(1)　$\mathfrak{g}$ の全ての要素がコンパクトである．

(2)　$\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群 G でコンパクトなものが存在する．

(3)　有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への忠実な $\mathfrak{g}$ の歪エルミート表現 f が存在する．

証明.　**(1)⇒(2)**: Lie 群 $\{\exp(\mathsf{ad}(X))\}_{\mathfrak{g}}$ はコンパクトとなり，**(2)** が成立

する.

(2)⇒(1): X をコンパクト性の定義のところで述べた議論から直ちに得られる.

(1)⇒(3): 随伴表現が条件 **(3)** を満たす.

(3)⇒(1): **(3)** より, $\mathsf{f}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ の部分 Lie 環となる. $X \in \mathfrak{g}$ について, $\mathsf{ad}(\mathsf{f}(X))$ は $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ 上の行列として, 対角化可能で, 純虚数の固有値を持つ. $\mathsf{f}(\mathfrak{g})$ はその不変部分空間となるので, $\mathsf{ad}(\mathsf{f}(X)) = \mathsf{f}(\mathsf{ad}(X))$ の作用を $\mathsf{f}(\mathfrak{g})$ に制限すると, $\mathsf{f}(\mathfrak{g})$ 上の行列としても対角化可能となり純虚数の固有値を持つ. f は忠実であるので, この事実は $\mathsf{ad}(X)$ が対角化可能となり純虚数の固有値を持つことを意味する. したがって, **(1)** を得る. □

以下では, 定理3.5.6の条件を満たす Lie 環 $\mathfrak{g}$ を**コンパクト**であるという. この定義の下で, 表3.5のLie環は全てコンパクトとなり, 表3.6のLie環は全て非コンパクトとなる.

このとき, $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ についての商 Lie 環 $\mathfrak{g} / \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ の Killing form は負定値となり, $\mathfrak{g} / \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ は半単純となる. よって, $\mathfrak{g} / \mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g} / \mathfrak{c}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g} / \mathfrak{c}(\mathfrak{g})]$ となり,

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{c}(\mathfrak{g}) \tag{3.47}$$

を得る. すなわち, コンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ は可換部分 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ と半単純な部分 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の和に分解される.

さらに, 定理3.5.6より, Lie 環 $\mathfrak{g}$ の有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への忠実な歪エルミート表現が存在するのは, $\mathfrak{g}$ がコンパクトである場合に限られる. そのため, コンパクトでないLie環 $\mathfrak{g}$ の忠実な歪エルミート表現を考えるためには, 無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への表現を考える必要が生じる. ただし, 無限次元 Hilbert 空間への表現を扱うには若干の注意が必要である. Lie 群のユニタリ表現として得られる $\mathcal{H}$ 上の作用素は有界であるため, その扱いがさほど困難を生じない. しかし, Lie 環の歪エルミート表現では, 表現によって得られる $\mathcal{H}$ 上の作用素は一般には非有界である. そのため, Lie 環 $\mathfrak{g}$ の無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の歪エルミート表現 f は, $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $i\mathsf{f}(X)$ が自己共役作用素であり, f が Lie 環として準同型性を満たすものとして定義する.

特に, 半単純 Lie 環の既約な歪エルミート表現は, Killing form が負定値の

場合，その表現空間は有限次元に限られ，Killing form が不定値の場合，その歪エルミート表現空間は無限次元に限られる．

演習問題 15　$(\mathsf{ad}(g)X, \mathsf{ad}(g)Z)_{\mathfrak{g}} = (X, Z)_{\mathfrak{g}}$ を示せ．

なお，一般的に，表現 f が与えられている群が非コンパクトであっても，その系のハミルトニアンは Lie 環 $\mathfrak{g}$ のコンパクトな要素 X を用いて，$i\mathsf{f}(X)$ で与えられることが多いように思われる．本書では，非コンパクトな Lie 環であっても，その表現については，コンパクトな要素をベースになるものに限って扱うが，これには上記の物理的な理由も含まれている．

3.5.3　Casimir 作用素

次に Casimir 作用素とよばれる不変量を定義する．半単純実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_1, \ldots, e_d\}$ と Killing form についてのその双対基底 $\{e'_1, \ldots, e'_d\}$ を選ぶ．すなわち，$(e_k, e'_j)_{\mathfrak{g}} = \delta_{k,j}$ となるように選ぶ．そして，$\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ を Killing form を通じて $\mathfrak{g}$ と同一視して，$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$ の要素として，Casimir 作用素 $C := \sum_{j=1}^d e_j \otimes e'_j$ を定義する．C は $\mathfrak{g}$ 上の線型変換として見たとき，単位作用素となるので，A を $\mathfrak{g}$ 上の Killing form を保つ線型変換としたとき，$C = \sum_{j=1}^d (Ae_j) \otimes (Ae'_j)$ となり，群の作用の下で不変である．そして，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の表現 f に対して，$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$ から，$\mathcal{H}$ 上の線型変換への写像 $\mathsf{f}_* : \sum_t X_t \otimes X'_t \mapsto \sum_t \mathsf{f}(X_t)\mathsf{f}(X'_t)$ を与える．そして，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Casimir 作用素 C_{f} を C の f_* の像として定義すると，$C_{\mathsf{f}} = \sum_{j=1}^d \mathsf{f}(e_j)\mathsf{f}(e'_j)$ が成り立つ．すると，$\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群 $G(\mathfrak{g})$ の作用と可換になる．すなわち，$g \in G(\mathfrak{g})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}(g)C_{\mathsf{f}}\mathsf{f}(g)^{-1} &= \sum_{j=1}^d \mathsf{f}(g)\mathsf{f}(e_j)\mathsf{f}(g)^{-1}\mathsf{f}(g)\mathsf{f}(e'_j)\mathsf{f}(g)^{-1} \\
&= \sum_{j=1}^d \mathsf{f}(\mathsf{ad}(g)e_j)\mathsf{f}(\mathsf{ad}(g)e'_j) \\
&= \mathsf{f}\left(\sum_{j=1}^d (\mathsf{ad}(g)e_j) \otimes (\mathsf{ad}(g)e'_j)\right) = \mathsf{f}\left(\sum_{j=1}^d e_j \otimes e'_j\right) = C_{\mathsf{f}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また，$g = \exp(tX)$ とし，t について微分を考えると，任意の元

$X \in \mathfrak{g}$ に対して，以下の可換性が成り立つ．

$$\mathsf{f}(X)C_{\mathsf{f}} = C_{\mathsf{f}}\mathsf{f}(X). \tag{3.48}$$

前の節では，物理量がLie 環の表現を用いて，$i\mathsf{f}(X)$ で与えられることが多いと述べたが，その他に，Casimir 作用素 C_{f} を用いて与えられる物理量も存在する．既約表現ごとに，Casimir 作用素の値が異なる場合，物理量 C_{f} を測ることで，既約分解に対応する測定が可能となる．

3.6 Lie 群と Lie 環の関係 II

3.6.1 普遍被覆群

本節では，Lie 群の表現と Lie 環の表現の関係について述べる．表現の定義に従うと，実 (複素) Lie 群 G の $\mathcal{H}$ への表現 (ユニタリ表現) f から対応する実 (複素) Lie 環 $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{H}$ への表現 (歪エルミート表現) $\mathsf{f}(X) := \lim_{t\to 0}\frac{\mathsf{f}(\exp(tX))-I}{t}$ を与えることができる．しかし，一般には実（複素）Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現（歪エルミート表現）から実（複素）Lie 群 G の表現（ユニタリ表現）を与えることはできない．この問題を扱うのが，本章の目的である．

議論を簡単にするため，G は連結なものに限ることにする．そのために，G の中の微分可能な曲線（経路とよぶ）$c(t)$ を考えよう．G の始点と終点が同じ 2 つの経路 $c(t), \tilde{c}(t)$ が始点と終点を固定して，互いに連続的に移ることが可能であるとき，同値とし，$g \sim \tilde{g}$ と記すことにしよう．

そして，$c(t)$ の終点と，$\tilde{c}(t)$ の始点が等しいとき，$c(t)$ と $\tilde{c}(t)$ の間に積

$$(c\cdot\tilde{c})(t) := \begin{cases} \tilde{c}(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ c(2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{3.49}$$

を定義する．経路 $c(t)$ に逆の経路 $c^{-1}(t) := c(1-t)$ を与える．すると，始点と終点を g_0 とする経路全体は群になる（単位元は $g(t) = g_0, \forall t \in [0,1]$ となる線）．特に，単位元と同値な経路全体は正規部分群となる．よって，始点と終点を g_0 とする経路からなる群を，単位元と同値な連続な線からなる正規部分群で割った群が定義できる．すなわち，積 $[g]\cdot[g'] := [g\cdot g']$ が定義できる．この群を**基本群**とよび，$\pi_1(G)$ と記す．また，G が連結であるとき，基本

群は g_0 のとり方に依存しない．また，G は群であるので，任意の2つの経路 $c(t), \tilde{c}(t)$ にもう1つの積を定義することができる．

$$(c\tilde{c})(t) := c(t)\tilde{c}(t). \tag{3.50}$$

この2種類の積について，以下が成り立つ．

$$(c \cdot \tilde{c})(c' \cdot \tilde{c}')(t) = (c \cdot \tilde{c})(t)(c' \cdot \tilde{c}')(t) = \begin{cases} c(2t)c'(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \tilde{c}(2t-1)\tilde{c}'(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$= (cc') \cdot (\tilde{c}\tilde{c}')(t).$$

よって，$[(c \cdot \tilde{c})(c' \cdot \tilde{c}')] = [(cc') \cdot (\tilde{c}\tilde{c}')]$ が成り立つ．したがって，常に単位元 e を与える線を e と表すと，

$$[cc'] = [(c \cdot e)(e \cdot c')] = [(ce) \cdot (ec')] = [c \cdot c']$$

$$[cc'] = [(e \cdot c)(c' \cdot e)] = [(ec') \cdot (ce)] = [c' \cdot c]$$

を得る．$[c \cdot c'] = [c' \cdot c]$ が成り立つことから以下の補題を得る．

補題 3.6.1　実（複素）Lie 群 G の基本群 $\pi_1(G)$ は可換群である．

基本群が単位元だけの場合，G は**単連結**であるという．そして，G が単連結の場合，以下に示すように，対応する Lie 環の表現 f から一意に Lie 群の表現 f が得られる．

Lie 群 G の単位元 I の近傍はその Lie 環 $\mathfrak{g}$ と同一視できるので，その要素 $e^{t_1 X_1}$ に対して，$\mathsf{f}(e^{t_1 X_1}) = e^{t_1 \mathsf{f}(X_1)}$ で与えることができる．一般に，G の経路 $c(t)$ が与えられると，その経路に沿って，表現を与えることができる．すなわち，$\mathsf{f}(c)(t)$ を定義することができる．したがって，$g \in G$ に対して，$\mathsf{f}(g)$ を与えるには，I を始点とし，g を終点とする経路 $c(t)$ を与え，$\mathsf{f}(c)(1)$ として，$\mathsf{f}(g)$ を与えることになる．この定義では，経路 $c(t)$ のとり方に依存しているので，依存しないことを示す必要がある．I を始点とし，g を終点とする経路 $\tilde{c}(t)$ を考えよう．すると，$(c \cdot \tilde{c}^{-1})(t)$ は始点と終点を g とする経路となる．そして，$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の経路 $(\mathsf{f}(c) \cdot \mathsf{f}(\tilde{c})^{-1})(t)$ の始点と終点は $\mathsf{f}(\tilde{c})(1)$ と $\mathsf{f}(c)(1)$ になる．G は単連結であるので，この経路を恒等的に g とする経路に連続的に変形することができる．$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の経路 $(\mathsf{f}(c) \cdot \mathsf{f}(\tilde{c})^{-1})(t)$ も，始点と終点を

固定したまま，連続的にある 1 点を与える $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の経路に変形できる．したがって，$\mathsf{f}(\tilde{c})(1)$ と $\mathsf{f}(c)(1)$ は一致する．次に積について考えよう．$g_1, g_2 \in G$ について，I を始点とし，g_1，g_2，g_1g_2 を終点とする経路 $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ を考える．このとき，$\mathsf{f}(c_1)(1)\mathsf{f}(c_2)(1) = c_3(1)$ となることを示せば十分である．$\mathsf{f}(c_1)(1)\mathsf{f}(c_2)(t)$ は経路 $c_1c_2(t)$ に沿った像を表すので，$\mathsf{f}(c_1c_2)(t)$ に等しい．経路 $c_1c_2(t)$ は I を始点とし，g_1g_2 を終点とする経路であるので，先の議論より，$\mathsf{f}(c_1c_2)(1) = \mathsf{f}(c_3)(1)$ を得る．したがって，準同型性を得る．すなわち，G の表現 f が定義できる．

一方，連結 Lie 群 G が単連結でない場合，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 f から連結 Lie 群 G の対応する表現が存在しない場合がある．しかし，そのような場合でも，これから述べるように，射影表現は存在する．すなわち，連結 Lie 群 G による量子論的な対称性が与えられるための必要十分条件は，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の歪エルミート表現が与えられることである．この事実を確認するために，基本群 $\pi_1(G)$ の実（複素）Lie 群 G による中心化拡大を以下によって与える．G の始点を I とする経路の集合に積 (3.50) に関する群を考える．この群は恒等的に I を与える経路が単位元となる．（逆元の存在も容易に確かめられる．）この群について同値関係 $\sim$ に基づく同値類で割った群を G の**普遍被覆群**とよび，$\tilde{G}$ と記す．普遍被覆群 $\tilde{G}$ から G への写像 $\pi : c(t) \to c(1)$ を与えると，$\pi^{-1}(I) = \pi_1(G)$ となる．したがって，普遍被覆群 $\tilde{G}$ は基本群 $\pi(G)$ の G による中心拡大となる．例えば，3 次元空間の回転を表す Lie 群 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ の普遍被覆群は $\mathrm{SU}(2)$ となることが知られている．この場合，$\mathrm{SU}(2)$ の中心は $\{\pm I\}$ であり，$\mathbb{Z}_2$ と同型であり，$\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ となるので，$\mathrm{SU}(2)$ は $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ の中心拡大となる．

なお，基本群 $\pi_1(G)$ の G による拡大で，連結なものは普遍被覆群 $\tilde{G}$ に限られる．さらに，基本群 $\pi_1(G)$ の部分群 H に注目し，$\pi_1(G)/H$ の G による拡大で連結なものは，$\tilde{G}/H$ に限られる．$\phi(g_1, g_2)$ を含む H の剰余類を $[\phi(g_1, g_2)]$ とするとき，$\tilde{G}/H$ は因子団 $\{[\phi(g_1, g_2)]\}$ による中心化拡大と一致する．特に，$\pi_1(G)/H$ が $\mathbb{Z}_2$ のとき，$\check{G} := \tilde{G}/H$ は $\check{G}/\mathbb{Z}_2 \cong G$ となり，$\check{G}$ は $\mathbb{Z}_2$ の G に関する中心拡大となる．このとき，$\check{G}$ は G の**二重被覆**とよばれる．

例えば，2 次元空間と時間からなる 2 次元 Lorrentz 群の連結成分 $\mathrm{SO}(2,1,\mathbb{R})_0$ の基本群は $\mathbb{Z}$ である．ここで $\mathbb{Z}$ の部分群 H として，偶数からなる部分群 $2\mathbb{Z}$ を選ぼう．すると，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ となる．特に，$\mathrm{SO}(2,\tilde{1},\mathbb{R})_0/2\mathbb{Z} \cong \mathrm{SU}(1,1)$ と

なり，SU(1,1) は $\mathbb{Z}_2$ の $SO(2,1,\mathbb{R})_0$ に関する中心拡大となる．

一般に，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍被覆群 $\tilde{G}$ の中心 $C(\tilde{G})$ の離散的な部分群 H を選ぶと，Lie 群 $\tilde{G}/H$ の Lie 環は $\mathfrak{g}$ に一致する．$\tilde{G}$ の随伴表現 ad について，

$$C(\tilde{G}) = \mathsf{ad}^{-1}(I) \tag{3.51}$$

となる．$\subset$ は定義から自明であり，$\supset$ は $\tilde{G}$ の任意の元は $X \in \mathfrak{g}$ を適切に選ぶと $\exp(X)$ と記述できることから示せる．

よって，Lie 群 $\tilde{G}/H$ に対しても，随伴表現 ad を定義することができる．特に，$\mathfrak{g}$ が半単純である場合，中心 $C(\tilde{G})$ は離散的な $\tilde{G}$ の部分群となるので，Lie 群 $\tilde{G}/C(\tilde{G})$ の Lie 環は $\mathfrak{g}$ に一致し，(3.51) より，その中心は自明となる[2]．表現が既約での場合，密度行列の変換に働くのは，Lie 群 $\tilde{G}/C(\tilde{G})$ である．$\mathfrak{g}$ が単純である場合は Lie 群 $\tilde{G}/C(\tilde{G})$ は（抽象的な群としての）単純群となる．すなわち，この場合，中心 $C(\tilde{G})$ による作用は密度行列を動かさない．例えば，上述の例では，密度行列の変換に働くのは，SU(2) や SU(1,1) ではなく，$SO(3,\mathbb{R})$ や $SO(1,2,\mathbb{R})_0$ の作用が直接，状態の変化に反映される．

3.6.2　表現との関係

普遍被覆群 $\tilde{G}$ の微小変化は G の微小変化と一致するので，$\tilde{G}$ の Lie 環は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ と一致する．そして，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 f から普遍被覆群 G の表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ は以下のように与えられる．普遍被覆群 G の要素を表す経路 $c(t)$ を考え，経路に沿った像 $\mathsf{f}(c)(t)$ を考え，$\mathsf{f}(c)(1)$ を $\tilde{\mathsf{f}}([c])$ と定義する．この定義が c のとり方に依存しないことは，先の単連結の場合の議論と同様にして示せる．特に，$\mathfrak{g}$ の表現 f が既約表現であるとき，普遍被覆群 $\tilde{G}$ の表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ も既約表現となる．そして，$\tilde{G}$ が G による中心拡大であることから，2.4 節の議論より，$\tilde{G}$ の既約表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ から G の射影的表現が定まる．この議論をまとめると以下の定理が成り立つ．

定理 3.6.2　連結 Lie 群 G に対して，その普遍被覆群 $\tilde{G}$ の（ユニタリ）表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ の（歪エルミート）表現 f は1対1に対応し，以下の関係式を満たす．

---

[2] $\mathfrak{g}$ が半単純でない場合は，$C(\tilde{G})$ が連続群となることがある．特に冪零 Lie 環の場合，$C(\tilde{G})$ は連続群となり，Lie 群 $\tilde{G}/C(\tilde{G})$ の Lie 環は $\mathfrak{g}$ とは異なる．

$$\tilde{\mathsf{f}}(e^{tX}) = \exp(t\mathsf{f}(X)), \quad \mathsf{f}(X) = \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{\mathsf{f}}(e^{tX}) - I}{t}.$$

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の既約な歪エルミート表現の添え字の集合を $\hat{\mathfrak{g}}$ とし，その中で，有限次元のものに対応するものの集合を $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{f}}$ とする．すると，一般の Lie 群については以下の定理が成り立つ．

定理 3.6.3 G を連結 Lie 群とし，その基本群 $\pi_1(G)$ が有限群であり，その元の位数の最大値を k とする．有限次元射影的表現 f の因子団 $\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ に対して，U_k に値をとりこれと同値となる因子団 $\{e^{i\theta'(g,g')}\}_{g,g'}$ が存在する．そのため，有限次元射影的表現の因子団を扱うためには，$H(G:\mathbb{Z}_k)$ を扱えば十分となる．

さらに，因子団を $\mathcal{E}\in H(G:\mathbb{Z}_k)$ に持つ射影的表現 f に対して，普遍被覆群 $\tilde{G}$ の表現 $\tilde{\mathsf{f}}$ で以下を満たすものが存在する．任意の $g\in G=\tilde{G}/\pi_1(G)$ に対して，$\mathsf{f}(g)=\tilde{\mathsf{f}}(\tilde{g})$ を満たす代表元 $\tilde{g}\in\tilde{G}$ が存在する．既約な射影的ユニタリ表現に上記の事実を適用すると，$\bigcup_{\mathcal{E}\in H(G:\mathbb{Z}_k)}\hat{G}_{\mathrm{f}}(\mathcal{E}) = \hat{\tilde{G}}_{\mathrm{f}} = \hat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{f}}$ を得る．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の既約表現 f の表現空間の次元 d と $\pi_1(G)$ の元の位数の最大値 k が互いに素である場合，系 2.4.3 より，G の射影表現 f は表現となる．

証明. d 次元射影的表現 f の因子団を $\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}$ とする．f と同値な射影的表現同値な射影的表現 $\bar{\mathsf{f}}$ を $\bar{\mathsf{f}}(g) := \mathsf{f}(g)(\frac{\det \mathsf{f}(g)}{|\det \mathsf{f}(g)|})^{-1/d}\in \mathrm{SL}(\mathcal{H})$ で定義する．すると，$\bar{\mathsf{f}}$ の因子団 $\{e^{i\theta'(g,g')}\}_{g,g'}$ は U_d に値をとる．この因子団に基づく群 U_d の Lie 群 G による拡大を G' と記す．G' の e を含む連結成分を G'_0 とする．このとき，U_d の部分群 U_l を適切に選ぶと，U_l は G'_0 の中心に含まれ，$G'_0/\mathrm{U}_l = G$ となる．このことと補題 3.1.1 より，因子団 $\{e^{i\theta'(g,g')}\}_{g,g'}$ は U_l に値をとる．

さらに，G'_0 の Lie 環は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ と一致することから，G'_0 の普遍被覆群は G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ と一致し，$\tilde{G}/\pi_1(G'_0)=G'_0$ となる．$\tilde{G}/\pi_1(G)=G$ であるから，U_l は $\pi_1(G)$ の部分群となる．この事実は，l が $\pi_1(G)$ の元の位数の最大値 k の約数であることを示している．したがって，因子団 $\{e^{i\theta'(g,g')}\}_{g,g'}$ は U_k に値をとる．よって，定理の前半部分を得た．後半部分は，前半部分議

論より直ちに得られる． □

さらに以下の系を得る．

系 3.6.4　コンパクト Lie 群 G と $\pi_1(G)$ の元の位数の最大値 k は関係式 $\bigcup_{\mathcal{E}\in H(G:\mathbb{Z}_k)}\hat{G}(\mathcal{E})=\hat{\hat{G}}=\hat{\mathfrak{g}}$ を満たす．

証明.　次の節の定理 3.7.2 より，Lie 群 G がコンパクトの場合，既約な射影的ユニタリ表現は有限次元のものに限られる．したがって，直ちに系の主張を得る． □

3.6.3　射影的表現

先に述べたように，Lie 群 G が普遍被覆群である場合には，Lie 環の（歪エルミート）表現と Lie 群の（ユニタリ）表現が 1 対 1 に対応した．Lie 群 G が普遍被覆群でない場合でも，Lie 環の（歪エルミート）表現から Lie 群の射影的（ユニタリ）表現が構成できた．3.6.2 項の議論を射影的（ユニタリ）表現に適用すると，Lie 群の射影的（ユニタリ）表現から，Lie 環の射影的（歪エルミート）表現が得られる．逆に，G が普遍被覆群である場合には，Lie 環の射影的（歪エルミート）表現から，Lie 群の射影的（ユニタリ）表現が得られる．さらに，普遍被覆群の射影的（ユニタリ）表現から同じ Lie 環に対応する普遍被覆でない Lie 群の射影的（歪エルミート）表現が得られる．したがって，一般の Lie 群でも，Lie 環の射影的（歪エルミート）表現から，Lie 群の射影的（ユニタリ）表現が得られる．

しかし，補題 3.4.4 より，有限次元空間への真に射影的な表現は存在しない．さらに，次の節の定理 3.7.2 より，コンパクト Lie 群の既約な射影的ユニタリ表現は有限次元のものに限られる．したがって，コンパクトな Lie 環について扱う限りは，Lie 環の（歪エルミート）表現を扱えば十分である．一方，非コンパクトな Lie 環を扱う場合，表現空間が無限次元となりうる．そのため，Lie 環の歪エルミート表現を扱う必要がある．

3.6.4　複素 Lie 群としての表現

複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対しても普遍被覆群 $\tilde{G}$ を定義することができる．そして，

複素 Lie 群 G_1 から複素 Lie 群 G_2 への群としての準同型写像が，複素座標について正則となっているとき，複素 Lie 群として準同型という．特に，複素 Lie 群 G から複素 Lie 群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ への複素 Lie 群としての準同型写像を複素 Lie 群 G の**複素 Lie 群としての表現**とよぶ．複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素 Lie 環としての表現と対応する複素 Lie 群 G の複素 Lie 群としての表現との間には上記の実 Lie 環の表現と実 Lie 群の表現と同じ関係が成り立つ．なお，複素 Lie 群 G の実 Lie 群としての表現であっても，複素 Lie 群としての表現とならない場合が存在するので，注意を要する．また，ユニタリ群が複素 Lie 群ではない．そのため，複素 Lie 群のユニタリ表現は複素 Lie 群としての表現ではない．

3.7 群と等質空間上の不変測度

本節では，群 G 上の積分（測度）$\nu(dg)$ の性質について若干準備を行う．ν は測度であるので，G の Borel 集合 B に対して，$\nu(B)$ が決まることになる．任意の $g \in G$ と任意の Borel 集合 B に対して，$\nu(gB) = \nu(B)$ であるとき，ν は左不変という．同じく，$\nu(Bg) = \nu(B)$ であるとき，ν は右不変という．左不変測度，右不変測度はそれぞれの定数倍を除いて一意に定まる．両者が一致するとき，**不変測度（Haar 測度）**とよばれる．

G が加算個の要素からなるとき，左不変測度と右不変測度は一致し，$\nu(B) = \#B$ で与えられる．このとき以下の定理が知られている．

定理 3.7.1 連結成分が有限個の Lie 群 G について，左不変測度と右不変測度が一致するために必要十分条件は対応する Lie 環 $\mathfrak{g}$ について

$$\mathrm{Tr}\,\mathsf{ad}(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{g} \tag{3.52}$$

となることである．

上記の条件を満たす場合，群 G は**ユニモジュラー**とよばれる．

例えば，対応する Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純である場合は，任意の要素 $X \in \mathfrak{g}$ はある 2 つの要素 $Y, Z \in \mathfrak{g}$ の積 $[Y, Z]$ で表される．よって，(3.36) より，$\mathsf{ad}(X) = [\mathsf{ad}(Y), \mathsf{ad}(Z)]$ となり，(3.52) が成り立ち，不変測度が存在する．半単純 Lie 環は，単純 Lie 環の直和で表されるため，(3.52) を満たし，不変測度が存在する．さらに，コンパクト Lie 群の Lie 環の要素はコンパクトであるため

(3.52) を満たすので，任意のコンパクト Lie 群について不変測度が存在する．一方，アファイン群 $\mathrm{Aff}(n)$ の場合，$(X,y),(X',y') \in \mathrm{Aff}(n) \cong \mathfrak{gl}(n) \oplus \mathbb{R}^n$ について，$\mathsf{ad}((X,y))(X',y') = (\mathsf{ad}(X)X', Xy' - X'y)$ となる．したがって $\mathrm{Tr}\,\mathsf{ad}((X,y)) = \mathrm{Tr}\,X$ となり，(3.52) を満たさない．

離散群を含む Lie 群 G がコンパクトであることの必要十分条件は，G の不変測度 μ の全測度 $\mu(G)$ が有限値であることである．よって，有限群を含むコンパクト Lie 群の場合，全測度が 1 になるように**規格化**でき，規格化された不変測度を μ_G と記す．したがって，G がコンパクト Lie 群の場合，$\mathcal{H}$ 上の G の既約ユニタリ表現 f, $v \in \mathcal{H}$, $g' \in G$ について，

$$\begin{aligned}&\mathsf{f}(g')\int_G \mathsf{f}(g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}(g)^\dagger \mu_G(dg)\mathsf{f}(g')^\dagger \\ &\quad = \int_G \mathsf{f}(g'g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}(g'g)^\dagger \mu_G(dg) = \int_G \mathsf{f}(g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}(g)^\dagger \mu_G(dg)\end{aligned}$$

となる．よって，補題2.3.2より，$\mathsf{f}(g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}(g)^\dagger \mu_G(dg)$ は I の定数倍となる．また，$u \in \mathcal{H}$ について，$\int_G \langle u|\mathsf{f}(g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}(g)^\dagger|u\rangle \mu_G(dg) > 0$ が成り立つ．この値を $\frac{1}{d_\mathsf{f}}$ とすると，$d_\mathsf{f}\int_G \mathsf{f}(g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}(g)^\dagger \mu_G(dg) = I$ が成り立つ．このとき，両辺のトレースを比較すると，$\mathcal{H}$ は有限次元となり，その次元は d_f と一致する．これらの議論をまとめると，以下を得る．

定理 3.7.2　G がコンパクト Lie 群の場合，G の任意の既約ユニタリ表現は有限次元表現となる．したがって，$\lambda \in \hat{G}$ に対して，f_λ の表現空間の次元を d_λ とすると，

$$d_\lambda \int_G \mathsf{f}_\lambda(g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}_\lambda(g)^\dagger \mu_G(dg) = I \tag{3.53}$$

が成り立つ．なお，この事実は，既約な射影的ユニタリ表現についても同様にして示すことができる．

上記の積分は単なる数学的な公式ではない．1.1 節で述べたように，一般に単位行列（恒等作用素）の分解が与えられると，それに対応する測定が存在することが知られている．したがって，(3.53) はある測定を表していることになる．

次に，G がコンパクトでない場合を考えよう．この場合，G の不変測度を μ_G で表すが，μ_G の全測度は 1 とは限らない．また，既約な表現空間も有限

次元とは限らない．以下では，あるノルム 1 のベクトル v_0 に対して，

$$d_\lambda^{-1} = \int_G |\langle v_0|\mathsf{f}_\lambda(g)|v_0\rangle|^2 \mu_G(dg) < \infty \tag{3.54}$$

を満たす実数 d_λ が存在すると仮定する．この場合，以下の定理が成り立つ．

定理 3.7.3 G をコンパクトとは限らない (3.52) を満たす Lie 群とし，表現 f_λ に対し，(3.54) を満たす実数 d_λ を選ぶ．任意のノルム 1 のベクトル v に対して，(3.53) が成り立つ．また，d_λ は v_0 のとり方に依存しない．

このため，以下では (3.54) を満たす d_λ を表現 f_λ の μ_G に関する**形式的次元**とよぶ．

証明． Schur の補題を用いると，$d_\lambda \int_G \mathsf{f}_\lambda(g)|v_0\rangle\langle v_0|\mathsf{f}_\lambda(g)^\dagger \mu_G(dg)$ は I の定数倍となる．また，(3.54) より，作用素ノルムを考えることから，この作用素は I となる．したがって，任意のノルム 1 のベクトル v に対して，$1 = d_\lambda \int_G |\langle v_0|\mathsf{f}_\lambda(g)|v\rangle|^2 \mu_G(dg)$ が成り立つ．$d_\lambda \int_G \mathsf{f}_\lambda(g)|v\rangle\langle v|\mathsf{f}_\lambda(g)^\dagger \mu_G(dg)$ も同様の議論から I の定数倍となる．上の式を用いて作用素ノルムを考えることから，この作用素も I となる． □

Lie 群 G が非自明なコンパクト部分群を持つ場合，$G = KP$ となり，以下の条件を満たすように，極大なコンパクト部分群 K と G のある部分群 P がとれる．任意の $g \in G$ に対して，$g = kp$ となる $k \in K$ と $p \in P$ が一意にとれる．このような分解は G に対して同型を除いて一意に定まり，G の **Cartan 分解**という [19, p.3]．したがって，G の不変測度 μ_G は K と P の不変測度 μ_K, μ_P を用いて，$\mu_G(dg) = \mu_K(dk)\mu_P(dp)$ と書ける．以下では，μ_K が K の不変測度として，K について規格化されるとき，μ_G は G の**規格化された不変測度**という．Lie 群 G が非自明なコンパクト部分群を持つ場合は μ_G は規格化された不変測度を表すことにする．

次に H を固定化群とする Lie 群 G の等質空間 $\Theta := G/H$ に注目しよう．Θ 上の測度 μ が $\mu(B) = \mu(gB)$ を満たすとき，μ_Θ を**不変測度**とよぶことにする．不変測度は定数倍を除いて一意に定まる．G の不変測度 μ が存在するとき，Θ 上の測度 μ_Θ を $\mu_\Theta(B) := \mu(\pi_H^{-1}(B))$ で定義すると，μ_Θ は不変測度となる．ここで，π_H を G から G/H への射影とした．状態 $|v\rangle\langle v|$ が H の作

用の下で不変である場合，状態 $|v\rangle\langle v|$ への作用は G/H の要素で与えることができる．したがって，$\theta \in G/H$ に対して，剰余類 θ の代表元 $g(\theta)$ を用いて，(3.53) は以下のように書き直せる．

$$d_\lambda \int_\Theta \mathsf{f}_\lambda(g(\theta))|v\rangle\langle v|\mathsf{f}_\lambda(g(\theta))^\dagger \mu_\Theta(d\theta) = I. \tag{3.55}$$

特に，G が非自明なコンパクト部分群を持つ場合は，μ_G は規格化されたものを表すので，μ_Θ は規格化されたものを表すとする．そして，(3.55) の右辺の d_λ は形式的次元（G がコンパクトの場合は次元）である．

一方，非コンパクト群 G が非自明なコンパクト部分群を持たない場合は，この方向で規格化された不変測度を与えることができない．例えば，加法についての群 $\mathbb{R}$ は非コンパクト群となるが，この場合は，不変測度として，$\mu_\mathbb{R}([a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$ として選ぶこととする．

3.8　Lie 群での Fourier 変換

Lie 群 G の表現は，Lie 環の表現から導ける．しかし，Lie 群 G 上の不変測度を考えることで，Lie 群 G の表現特有の有益な性質が得られる．

初めに，最も簡単な Lie 群の例として，単位円周 $\mathrm{U}(1)$ を考えよう．$\mathrm{U}(1)$ の既約表現 f の表現空間は 1 次元となり，任意の整数 k を用いて，$\mathsf{f}(\omega) = \omega^{-n}$，$(\forall\omega \in \mathrm{U}(1))$ と表すことができる．したがって，既約表現の集合 $\hat{\mathrm{U}(1)}$ は整数の集合 $\mathbb{Z}$ は同一視できる．すると，$\mathrm{U}(1)$ 上の 2 乗可積分な関数の集合 $L^2(\mathrm{U}(1)) := \{\phi | \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|^2 d\theta < \infty\}$ と $\hat{\mathrm{U}(1)} = \mathbb{Z}$ 上の 2 乗可積分な関数の集合 $L^2(\hat{\mathrm{U}(1)}) := \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} | \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ はベクトル空間として同型となる．すなわち，$L^2(\mathrm{U}(1))$ から $L^2(\hat{\mathrm{U}(1)})$ への線型写像である（離散）Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と $L^2(\hat{\mathrm{U}(1)})$ から $L^2(\mathrm{U}(1))$ への線型写像である（離散）逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を $\mathcal{F}[\phi](n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$，$\mathcal{F}^{-1}[\{a_n\}](\omega) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\omega^n$ で与えると，$\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}$ と $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}$ は恒等写像となる．

以下ではこの議論を一般のコンパクト Lie 群に拡張する．コンパクト Lie 群の表現においても，有限群の場合と同様の理由で，あるベクトルの軌道を見る限りにおいては，表現空間 $\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{d_\lambda}$ を扱えば十分である．この表現空間は左からの Lie 群 G の作用に注目する限り，直和空間 $\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ と同型

である．そして，直和空間 $\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ の要素 $A=(A_1,\ldots)$, $B=(B_1,\ldots)$ に対して，内積 $\langle A,B\rangle_{\oplus_\lambda \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)} := \sum_{\lambda=1}^k \mathrm{Tr}\, A_\lambda^\dagger B_\lambda$ を入れると，この内積は表現空間 $\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathcal{U}_\lambda \otimes \mathbb{C}^{d_\lambda}$ の内積と同じである．この内積に関して完備な空間を $L^2(\hat{G})$ と記す．Lie 群 G が作用する空間 $L^2(\hat{G})$ がどのような扱いが可能か以下で調べる．

コンパクト Lie 群 G の表現について 2.8 節と同様の議論を行う．有限群ではないため，2.8 節と平行した議論を行うには若干の技術的困難を伴うので，以下においても，導出の詳細は省略することにする．初めに G 上の規格化された不変測度 μ_G 上で二乗可積分な関数の集合 $L^2(G) := \{\phi | \int_G |\phi(g)|^2 \mu_G(dg) < \infty\}$ に注目する．

定理 3.7.2 より，コンパクト Lie 群 G の任意の既約ユニタリ表現の表現空間の次元は有限となる．その数は，高々加算無限個である．これらの既約ユニタリ表現を f_λ と記し，その表現空間を $\mathcal{U}_\lambda$ と記す．$\mathcal{U}_\lambda$ の正規直交基底を $|\lambda,m\rangle$ とし，関数 $R(\lambda,m,m') := \langle \lambda,m'|\mathsf{f}_\lambda(g)|\lambda,m\rangle$ を定義する．すると，以下の直交性が成り立つ．

$$\int_G R_{\lambda,m,m'}(g) R_{\tilde{\lambda},\tilde{m}',\tilde{m}}(g)\mu_G(dg) = \frac{1}{d_\lambda}\delta_{\lambda,\tilde{\lambda}}\delta_{m,\tilde{m}}\delta_{m',\tilde{m}'}. \tag{3.56}$$

そして，(3.56) より，(2.46) と同様にして，指標の直交性

$$\int_G \chi_{\lambda'}(g)\overline{\chi_\lambda(g)}\mu_G(dg) = \int_G \chi_{\lambda'}(g)\chi_{\lambda^*}(g)\mu_G(dg) = \delta_{\lambda',\lambda} \tag{3.57}$$

および関係式

$$\int_G \overline{\chi_\lambda(g)}\mathsf{f}_{\lambda'}(g)\mu_G(dg) = \frac{\delta_{\lambda',\lambda}}{d_\lambda} I_{\lambda'} \tag{3.58}$$

を得る．特に，G の部分群 G' の下でも f_λ, f_{λ^*} が既約である場合，積分範囲を G' の不変測度に限っても，(3.57) と同様の直交性が成り立つ．したがって，(2.50) と同様にして，

$$C_{\lambda,\lambda'}^{\lambda''} = C_{\lambda,\lambda''^*}^{\lambda'^*} = C_{\lambda',\lambda''^*}^{\lambda^*} \tag{3.59}$$

を得る．

そして, **Fourier 変換** $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ と**逆 Fourier 変換** $\mathcal{F} : L^2(\hat{G}) \to L^2(G)$ を以下で定義する.

$$(\mathcal{F}[\phi])_\lambda := \sqrt{d_\lambda} \int_G \mathsf{f}_\lambda(g)^\dagger \phi(g) \mu_G(dg) \tag{3.60}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[A](g) := \sum_\lambda \sqrt{d_\lambda} \operatorname{Tr} \mathsf{f}_\lambda(g) A_\lambda. \tag{3.61}$$

すると, (3.58) より, $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[A] = A$ となる. さらに, 後に示すように, $\mathcal{F}$ の Kernel が $\{0\}$ となる. よって, $\mathcal{F}$ の定義域である $L^2(G)$ は $\mathcal{F}^{-1}$ の像と同型となり, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\phi] = \phi$ を得る. したがって, 関数系 $\{\frac{1}{\sqrt{d_\lambda}} R_{\lambda,m,m'}\}_{\lambda,m,m'}$ が $L^2(G)$ の正規直交基底になる.

Ker $\mathcal{F} = \{0\}$ の証明.　2.8 節では $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\phi] = \phi$ の証明において, $\mu_G(g) = \frac{1}{|G|}$ を用いている. Lie 群の場合は分母が無限大になるため, この方法は用いることができない. Ker $\mathcal{F} \neq \{0\}$ とする. すると, $\mathcal{F}[\phi] = 0$ となる連続関数 ϕ が存在する. 全ての表現 f_λ の下で $\int_G \phi(g) \mathsf{f}_\lambda(g)^\dagger \mu_G(dg) = 0$ となる. ここで, G の要素 g の $\psi \in L^2(G)$ への左からの作用 $\psi(g') \mapsto \psi(g^{-1}g')$ を考える. この G の表現を L と書くと, 表現 L は既約表現の組み合わせで与えられるので, この表現に先の式を適用すると, $\int_G \phi(g) L(g) \mu_G(dg) = 0$ を得る. $L(g)\psi(g') = \psi(g^{-1}g')$ であるので, $\int_G \phi(g)\psi(g^{-1}g')\mu_G(dg) = 0$ を得る. ここで, $\psi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$ のとき, $g' = e$ を代入すると, $\int_G |\phi(g)|^2 \mu_G(dg) = 0$ を得る. よって, $\phi(g) = 0$ となり, Ker $\mathcal{F} = \{0\}$ を得る. □

(3.56) の証明.　以下空間 $\bigoplus_\lambda \mathcal{H}_\lambda$ の内積は異なる $\lambda, \tilde{\lambda}$ について, 空間 $\mathcal{U}_\lambda$ と空間 $\mathcal{U}_{\tilde{\lambda}}$ は互いに直交するように選び, $\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ 上の作用素を扱う. また, $\bigoplus_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ への G の表現を $\tilde{\mathsf{f}}$ と記す.

$$\begin{aligned}
&\int_G R_{\lambda,m,m'}(g) R_{\tilde{\lambda},\tilde{m}',\tilde{m}}(g) \mu_G(dg) \\
&= \int_G \langle \lambda, m' | \mathsf{f}_\lambda(g) | \lambda, m \rangle \langle \tilde{\lambda}, \tilde{m} | \mathsf{f}_{\tilde{\lambda}}(g) | \tilde{\lambda}, \tilde{m}' \rangle \mu_G(dg) \\
&= \langle \lambda, m' | \left(\int_G \tilde{\mathsf{f}}(g) | \lambda, m \rangle \langle \tilde{\lambda}, \tilde{m} | \tilde{\mathsf{f}}(g) \mu_G(dg) \right) | \tilde{\lambda}, \tilde{m}' \rangle
\end{aligned}$$

となる．(2.45) と同様の理由により，$\lambda \neq \tilde{\lambda}$ のとき，0 となる．

一方，$\lambda = \tilde{\lambda}$ のとき，トレースに注意すると，$\int_G \tilde{\mathsf{f}}(g)|\lambda, m\rangle\langle\tilde{\lambda}, \tilde{m}|\tilde{\mathsf{f}}(g)^\dagger \mu_G(dg)$ $= \frac{\langle\tilde{\lambda},\tilde{m}|\lambda,m\rangle}{d_\lambda} I_\lambda$ となる．ただし，$I_{\lambda'}$ は $\mathcal{U}_{\lambda'}$ 上の単位行列である．よって，(3.56) を得る． □

上記の議論は，射影的表現の場合には以下のように拡張できる．因子団 $\mathcal{E} := [\{e^{i\theta(g,g')}\}_{g,g'}] \in H(G : U(1))$ に対応する既約な射影的表現の集合 $\hat{G}[\mathcal{E}]$ を用いて，ベクトル空間 $L^2(\hat{G}[\mathcal{E}]) := \bigoplus_{\lambda\in\hat{G}[\mathcal{E}]} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ を与える．すると，(3.60) と (3.61) に基づいて Fourier 変換と逆 Fourier 変換を定義すると，これらは $L^2(G)$ と $L^2(\hat{G}[\mathcal{E}])$ の間の同型写像となる．したがって，集合 $\hat{G}$ を集合 $\hat{G}[\mathcal{E}]$ に置き換えることで，(3.56),(3.57),(3.58) が成り立つ．

次に，G が非コンパクトの場合について考える．G がユニモジュラーな Lie 群であり，以下の条件を満たすとき，**Type I** という [7]．集合 $\mathsf{f}(G)' \cap \mathsf{f}(G)''$ の要素が定数に限られるとき，表現 f は重複度を持つある既約表現となる場合に限られる．ただし，

$$\mathsf{f}(G)' := \{A \,|\, \mathsf{f}(g)A = A\mathsf{f}(g),\ \forall g \in G\} \tag{3.62}$$

$$\mathsf{f}(G)'' := \{A \,|\, BA = AB,\ \forall B \in \mathsf{f}(G)'\}. \tag{3.63}$$

である．この場合，$\lambda \in \hat{G}[\mathcal{E}]$ について，一般には $\mathcal{U}_\lambda$ は無限次元となるので，$\mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ は$\mathcal{U}_\lambda$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素の集合とし，空間 $L^2(\hat{G}[\mathcal{E}]) := \bigoplus_{\lambda\in\hat{G}[\mathcal{E}]} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ を定義する．$\hat{G}[\mathcal{E}]$ の濃度が高々加算無限であり，任意の $\lambda \in \hat{G}[\mathcal{E}]$ について$\mathcal{U}_\lambda$ の形式的次元 d_λ が有限である場合は，(3.60) と (3.61) に基づいて Fourier 変換と逆 Fourier 変換を定義できる．これらは $L^2(G)$ と $L^2(\hat{G}[\mathcal{E}])$ の間の同型写像となる．同様に，(3.56), (3.57), (3.58) が成り立つ．$\hat{G}[\mathcal{E}]$ がこれらの条件を満たさない場合でも，$\hat{G}[\mathcal{E}]$ の高々加算濃度の部分集合 S でその要素 $\lambda \in S$ について形式的次元 d_λ が有限となる場合，$L^2(S) := \bigoplus_{\lambda\in S} \mathfrak{gl}(\mathcal{U}_\lambda)$ 上で逆 Fourier 変換は定義できる．

一方，$\hat{G}[\mathcal{E}]$ の濃度が連続濃度である場合，Lie 群 G が Type I であれば，Fourier 変換は以下のように定義できる [7, 6]．すなわち，$\lambda \in \hat{G}[\mathcal{E}]$ に対して，

$$(\mathcal{F}[\phi])_\lambda := \int_G \mathsf{f}_\lambda(g)^\dagger \phi(g) \mu_G(dg) \tag{3.64}$$

を与える．そのとき，$\hat{G}[\mathcal{E}]$ 上の測度 $\mu_{\hat{G}[\mathcal{E}]}$（**Plancherel 測度**とよばれる）でノルム

$$\|\mathcal{F}[\phi]\|^2 := \int_{\hat{G}[\mathcal{E}]} \mathrm{Tr}(\mathcal{F}[\phi])_\lambda (\mathcal{F}[\phi])_\lambda^\dagger \mu_{\hat{G}[\mathcal{E}]}(d\lambda) \tag{3.65}$$

の下で $\mathcal{F}$ がユニタリとなるものが一意に存在する．このとき，逆変換となる逆 Fourier 変換は以下で与えられる．

$$\mathcal{F}^{-1}[A](g) := \int_{\hat{G}[\mathcal{E}]} \mathrm{Tr}\, \mathsf{f}_\lambda(g) A_\lambda \mu_{\hat{G}[\mathcal{E}]}(d\lambda). \tag{3.66}$$

例えば，$G = \mathbb{R}$ の場合，$\mathbb{R}$ は可換群であるので，既約表現は 1 次元に限られ，$\lambda \in \hat{\mathbb{R}}$ に対応する既約ユニタリ表現は，$\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathsf{f}_\lambda(x) := e^{ix\lambda}$ で与えられる．すなわち，既約ユニタリ表現の集合 $\hat{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ となる．したがって，$L^2(\hat{\mathbb{R}})$ は二乗可積分空間 $L^2(\mathbb{R})$ となる．そこで，μ_G を $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ とすると，Plancherel 測度は $\frac{\partial\lambda}{\sqrt{2\pi}}$ となる．すなわち，Fourier 変換は $\mathcal{F}[\phi](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-ix\lambda} dx$ で与えられ，逆 Fourier 変換は $\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{ix\lambda} d\lambda$ で与えられる．これらはよく知られているように，L^2 ノルムを保存する同型変換となり，$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}$, $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ は恒等写像となる．

第4章

簡単な Lie 群と Lie 環の表現

4.1 SL(2, ℂ) とその部分群

これまでの議論で，物理的に重要な変換のなす群である $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ や $\mathrm{SO}(1,2,\mathbb{R})_0$ は Lie 環に関しては，$\mathfrak{su}(2)$ や $\mathfrak{su}(1,1)$ と同型であることがわかった．また，特に重要な物理量はこれらの Lie の歪エルミート表現を用いて表される．以下では，これらを含む群である $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ からスタートして，$\mathfrak{su}(2)$ や $\mathfrak{su}(1,1)$ の歪エルミート表現を扱うために必要となるこれらの群 $\mathrm{SU}(2)$ や $\mathrm{SU}(1,1)$ の構造を調べる．

4.1.1 SL(2, ℂ) の Gauss 分解

本節では，最も単純な複素 Lie 群である $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ とその部分群とその Lie 環の典型的な性質について調べる．ここで述べる性質は，後の議論の基礎となる．$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の複素 Lie 環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 基底として，以下の3つの要素を選ぶ．

$$E_{0,1} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ K_{+,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ K_{-,1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，下添え字 1 は Lie 群 $\mathrm{SU}(2)$ を表す．すなわち，ここで与えた基底は後で扱う $\mathrm{SU}(2)$ に関連している．この基底は交換関係 $[E_{0,1}, K_{\pm,1}] = \pm K_{\pm,1}$, $[K_{+,1}, K_{-,1}] = 2E_{0,1}$ を満たす．この交換関係は，Lie 環の表現論で

重要な役割を果たす．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の任意の要素はこれらの基底の線型結合で与えられる．同様の事実が，ほとんどの $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の要素についていえる．すなわち，測度 0 を点を除いて，任意の行列 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が $\begin{pmatrix} b & -a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix}$ という形に書ける場合を除いて，$x, y, z \in \mathbb{C}$ を適切に選ぶと，

$$
\begin{aligned}
g &= \exp(\zeta K_{-,1}) \exp(\eta E_{0,1}) \exp(\zeta' K_{+,1}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\eta/2} & 0 \\ 0 & e^{\eta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \zeta' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\eta/2} + \zeta\zeta' e^{\eta/2} & \zeta e^{\eta/2} \\ \zeta' e^{\eta/2} & e^{\eta/2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

が成り立つ．すなわち，$M_\gamma := \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $P_\zeta := \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，g が $\begin{pmatrix} b & -a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix}$ とならない場合は，g は $g = P_\zeta M_\gamma J P_{\zeta'} J^{-1}$ と書ける．一方，$\begin{pmatrix} b & -a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix}$ となる場合は，$g = M_a J P_{-ba}$ と書ける．しかし，そのような g の集合は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の中で測度が 0 となる．よって，測度 0 の点を除き，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の要素は分解 (4.1) を持つ．このような g の分解を **Gauss 分解**という．$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ やその部分群の構造を調べる際に，この分解は重要な役割を果たす．

4.1.2　SU(2) の構造

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の部分群である SU(2) の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ については，以下の基底が有効である．

$$
F_1^x := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1^y := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} J, \quad F_1^z := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}
$$

これらは交換関係 $[F_1^z, F_1^x] = F_1^y$，$[F_1^z, F_1^y] = -F_1^x$，$[F_1^x, F_1^y] = F_1^z$ を満たす．添え字 x, y, z を $1, 2, 3$ と読み替え，$\epsilon_{j,k,l}$ を j, k, l が $1,2,3$, $2,3,1$, $3,1,2$ のとき 1 とし，$3,2,1$, $2,1,3$, $1,3,2$ のとき -1 とし，それ以外のとき 0 とす

ると，上記の関係式は

$$[F_1^j, F_1^k] = \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{j,k,l} F_1^l \tag{4.2}$$

と記述することができる．

これらの基底を組み合わせることで，上述の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底 $E_{0,1} = -iF_1^z$, $K_{\pm,1} = -iF_1^x \mp F_1^y$ が得られる．$E_{0,1}$, $K_{\pm,1}$ は $\mathfrak{su}(2)$ の要素ではないが，後に $\mathfrak{su}(2)$ の表現を扱う際に有効となる．SU(2) の要素は $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$ を満たす 2 つの複素数 μ, ν を用いて，$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\overline{\nu} & \overline{\mu} \end{pmatrix}$ と表せる．$H = \{\exp(tF_1^z)\}$ は $U(1)$ と同型な SU(2) の部分群となる．H の要素 $\exp(tF_1^z)$ を右から作用させると，$\begin{pmatrix} \mu e^{-it/2} & \nu e^{it/2} \\ -\overline{\nu} e^{-it/2} & \overline{\mu} e^{it/2} \end{pmatrix}$ となる．したがって，H を固定化群とする等質空間 SU(2)/H の要素は ν と $\overline{\mu}$ の比で与えられる．そのため，SU(2)/H は $\mathbb{C}$ に ∞（$\overline{\mu} = 0$ に対応する）を加えた **Riemann 球面** $\hat{\mathbb{C}}$ と一致する．$\overline{\mu} \neq 0$ の場合は，$\hat{\mathbb{C}} = \mathrm{SU}(2)/H$ の要素は $\nu/\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ で与えられる．代表元として，$\mu \in \mathbb{R}$ となる場合を考える．すると，代表元は $\tau \in \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}$ を用いて，$\begin{pmatrix} \cos\tau & e^{i\phi}\sin\tau \\ -e^{-i\phi}\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}$ と書け，$\zeta := e^{i\phi}\tan\tau$, $\eta := -\log(1+|\zeta|^2)$ とすると，以下のように (4.1) で与えた Gauss 分解ができる．

$$\begin{pmatrix} \cos\tau & e^{i\phi}\sin\tau \\ -e^{-i\phi}\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} = \exp(\zeta K_{-,1}) \exp(\eta E_{0,1}) \exp(-\overline{\zeta} K_{+,1}).$$

さらに，$\xi := e^{i\phi}\tau$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} \cos\tau & e^{i\phi}\sin\tau \\ -e^{-i\phi}\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi}\tau \\ -e^{-i\phi}\tau & 0 \end{pmatrix} = \exp(\xi K_{-,1} - \overline{\xi} K_{+,1}) \tag{4.3}$$

が成り立つ．これらの表現は後に重要な役割を果たす．

2×2 のトレースが0となるエルミート行列の集合は SU(2) の作用に関して閉じている．$g \in \mathrm{SU}(2)$ がトレースが0となるエルミート行列 $\begin{pmatrix} z & x-yi \\ x+yi & -z \end{pmatrix}$ を $g \begin{pmatrix} z & x-yi \\ x+yi & -z \end{pmatrix} g^{-1}$ に移す写像を座標 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ で表示すると，$\mathbb{R}^3$ 上の表現 $g \mapsto \iota(g)$ が定義できる．このとき，

$$\iota(F_1^x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \iota(F_1^y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \iota(F_1^z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ と Lie 環 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ は同型となる．しかし，Lie 群 SU(2) の基本群は自明な群となるが，Lie 群 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ の基本群は $\mathbb{Z}_2$ となるため，これらは同型ではない．$\mathbb{Z}_2$ の $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ による中心拡大が SU(2) と一致する．

4.1.3　SU(1,1) の構造

次に，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の部分群である SU(1,1) の Lie 環 $\mathfrak{su}(1,1)$ について考えよう．そのために，以下の基底を選ぶことにする．

$$F^x_{-1} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad F^y_{-1} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^z_{-1} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

ここで，下添え字 -1 は Lie 群 SU(1,1) を表す．これらは交換関係 $[F^z_{-1}, F^x_{-1}] = F^y_{-1}$, $[F^z_{-1}, F^y_{-1}] = -F^x_{-1}$, $[F^x_{-1}, F^y_{-1}] = -F^z_{-1}$ を満たす．これらの基底を組み合わせることで，以下の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底が得られる．

$$E_{0,-1} := -iF^z_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_{+,-1} := -iF^x_{-1} - F^y_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{-,-1} := -iF^x_{-1} + F^y_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これらは交換関係 $[E_{0,-1}, K_{\pm,-1}] = \pm K_{\pm,-1}$, $[K_{+,-1}, K_{-,-1}] = -2E_{0,-1}$ を満たす．$E_{0,-1}$, $K_{\pm,-1}$ は $\mathfrak{su}(1,1)$ の要素ではないが，後に $\mathfrak{su}(1,1)$ の表現を扱う際に有効となる．SU(1,1) の要素は $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ を満たす 2 つの複素数 μ, ν を用いて，$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & \overline{\mu} \end{pmatrix}$ と表せる．先に与えた H は $U(1)$ と同型な SU(1,1) の部分群となる．H の要素 $\exp(tF^z_1)$ を右から作用させると，$\begin{pmatrix} \mu e^{-it/2} & \nu e^{it/2} \\ \overline{\nu} e^{-it/2} & \overline{\mu} e^{it/2} \end{pmatrix}$ となる．したがって，H を固定化群とする等質空間 SU(1,1)/H の要素は ν と $\overline{\mu}$ の比で与えられる．そのため，SU(1,1)/H は**単位円板** $D := \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| < 1\}$ と一致し，その要素は $\nu/\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ で与えられる．代表元として，$\mu \in \mathbb{R}$ となる場合を考える．すると，代表元は $\tau \in \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}$ を用いて，$\begin{pmatrix} \cosh\tau & e^{i\phi}\sinh\tau \\ e^{-i\phi}\sinh\tau & \cosh\tau \end{pmatrix}$ と書け，$\zeta := e^{i\phi}\tan\tau$, $\eta := -\log(1 - |\zeta|^2)$ とし，(4.1) を用いると，以下のように $K_{\pm,-1}, E_{0,-1}$ に基づく Gauss 分解ができる．

$$\begin{pmatrix} \cosh\tau & e^{i\phi}\sinh\tau \\ e^{-i\phi}\sinh\tau & \cosh\tau \end{pmatrix} = \exp(\zeta K_{-,-1}) \exp(\eta E_{0,-1}) \exp(-\overline{\zeta} K_{+,-1}).$$

さらに，$\xi := e^{i\phi}\tau$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} \cosh\tau & e^{i\phi}\sinh\tau \\ e^{-i\phi}\sinh\tau & \cosh\tau \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi}\tau \\ e^{-i\phi}\tau & 0 \end{pmatrix} = \exp(\xi K_{-,-1} - \overline{\xi} K_{+,-1}) \tag{4.4}$$

が成り立つ．これらの表現は後に重要な役割を果たす．

SU(1,1) は (3.18) で述べたように，SL(2, ℝ), Sp(2, ℝ) と互いに同型な群である．Sp(2, ℝ) と SL(2, ℝ) は集合として全く一致するので，群としても一致する．これらの群と SU(1,1) との関係を調べる．

$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ を満たす2つの複素数 $\mu = a - ib, \nu = c + id$ を用いて，SU(1,1) の要素 g を表す．

$$g = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & \overline{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - ib & c + id \\ c - id & a + ib \end{pmatrix}$$

そして，写像 $\kappa : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ を以下で与える．

$$\kappa(g) := W \begin{pmatrix} a - ib & c + id \\ c - id & a + ib \end{pmatrix} W^{-1} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b + d & a - c \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$W := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

ここで，2つの実数 x, y から定義される複素数の組 $z = x + iy, \overline{z} = x - iy$ に g を以下のように作用させる．

$$\begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} gz \\ g\overline{z} \end{pmatrix} := g \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

x, y についての変換 (4.7) は先に定義した κ を用いて以下のように書ける．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \kappa(g) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

このとき，行列 $\kappa(g)$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ に含まれる．この g から $\kappa(g)$ を与える対応は行列の積を保存するので，SU(1,1) と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の同型を与える．その基本群は $\mathbb{Z}$ となる．そして，SU(1,1) の普遍被覆群を $\mathrm{SU}(\tilde{1},1)$ と記す．また，$\mathbb{Z}_2$ の SU(1,1) による中心拡大は SU(1,1) の二重被覆群となり，$\mathrm{SU}(\check{1},1)$ と記す．

そして，(3.26) で与えた同型関係は上で与えた群の同型関係で微分を考え $\kappa \begin{pmatrix} -zi & y + xi \\ y - xi & zi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z + x \\ -z + x & -y \end{pmatrix}$ を得る．この対応は Lie 環の積を保存するので，$\mathfrak{su}(1,1)$ と $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の同型を与える．したがって，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) =$

$\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ の基底は $\kappa(F^x_{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\kappa(F^y_{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\kappa(F^z_{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}J$ で与えられる.

4.2　$\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(1,1)$ の既約歪エルミート表現

4.2.1　既約歪エルミート表現の構成

本節では Lie 群の中で最も構造が単純な Lie 群 SU(2) と SU(1,1) の既約ユニタリ表現を扱う．そのために，対応する Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(1,1)$ の既約歪エルミート表現を扱う．これらの Lie 環の複素化はともに，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に一致する．しかし，それら 2 つの既約歪エルミート表現の構造は全く異なる．なお，$\mathfrak{su}(1,1)$ の歪エルミート表現については [16] が詳しい．

以下，$\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(1,1)$ の既約歪エルミート表現を統一的に扱い，どの点で，両者の決定的な違いが生じるか見てみよう．そのために，1 または -1 に値をとるパラメータ s を用いることにする（1 のときは $\mathfrak{su}(2)$ を表し，-1 のときは $\mathfrak{su}(1,1)$ を表す）．すると，基底の交換関係 $[F^z_s, F^x_s] = F^y_s$, $[F^z_s, F^y_s] = -F^x_s$, $[F^x_s, F^y_s] = sF^z_s$ を得る．両者の歪エルミート表現 f による生成元の像を与えよう．

$$\mathsf{F}^a_s := \mathsf{f}(F^a_s), \quad a = x, y, z,\ s = 1, -1.$$

そして，

$$\mathsf{E}_{0,s} := -i\mathsf{F}^z_s, \quad \mathsf{K}_{\pm,s} := -i\mathsf{F}^x_s \mp \mathsf{F}^y_s,\ s = 1, -1 \tag{4.8}$$

を与える．量子系では $\mathsf{E}_{0,s}$ がハミルトニアンとなることが多いので，このエルミート行列（自己共役作用素）について調べることが大切である．

形式的には，f を複素 Lie 環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現に拡張することで，これらは 4.1 節で与えた $E_{0,s}$, $K_{\pm,s}$ を用いて，以下のように与えることができる．

$$\mathsf{E}_{0,s} := \mathsf{f}(E_{0,s}), \quad \mathsf{K}_{\pm,s} := \mathsf{f}(K_{\pm,s}).$$

これらの作用素は以下の性質を満たす.

$$[\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{\pm,s}] = \pm \mathsf{K}_{\pm,s}, \quad [\mathsf{K}_{+,s}, \mathsf{K}_{-,s}] = 2s\mathsf{E}_{0,s} \tag{4.9}$$
$$\mathsf{E}_{0,s}^{\dagger} = \mathsf{E}_{0,s}, \quad \mathsf{K}_{+,s}^{\dagger} = \mathsf{K}_{-,s}.$$

逆に, $\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{\pm,s}$ から, 以下のように $\mathsf{F}_s^x, \mathsf{F}_s^y, \mathsf{F}_s^z$ を構成できるので, $\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{\pm,s}$ の作用だけを見れば十分である.

$$\mathsf{F}_s^z = i\mathsf{E}_{0,s}, \ \mathsf{F}_s^x = \frac{i}{2}(\mathsf{K}_{-,s} + \mathsf{K}_{+,s}), \ \mathsf{F}_s^y = \frac{1}{2}(\mathsf{K}_{-,s} - \mathsf{K}_{+,s}).$$

さらに以下の 2 つの関係式が成り立つ.

$$[\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{-,s}^n] = -n\mathsf{K}_{-,s}^n, \quad [\mathsf{K}_{+,s}, \mathsf{K}_{-,s}^n] = \mathsf{K}_{-,s}^{n-1} ns(2\mathsf{E}_{0,s} - (n-1)I). \tag{4.10}$$

(4.10) の証明.

$$[\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{-,s}^n] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{K}_{-,s}^j [\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{-,s}] \mathsf{K}_{-,s}^{n-1-j} = -n\mathsf{K}_{-,s}^n$$

が成り立つので, 以下の式から (4.10) を得る.

$$\begin{aligned}
[\mathsf{K}_{+,s}, \mathsf{K}_{-,s}^n] &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{K}_{-,s}^j [\mathsf{K}_{+,s}, \mathsf{K}_{-,s}] \mathsf{K}_{-,s}^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{K}_{-,s}^j 2s\mathsf{E}_{0,s} \mathsf{K}_{-,s}^{n-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (\mathsf{K}_{-,s}^{n-1} 2s\mathsf{E}_{0,s} + \mathsf{K}_{-,s}^j [2s\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{-,s}^{n-1-j}]) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (\mathsf{K}_{-,s}^{n-1} 2s\mathsf{E}_{0,s} + \mathsf{K}_{-,s}^j \cdot -2s(n-1-j) \mathsf{K}_{-,s}^{n-1-j}) \\
&= \mathsf{K}_{-,s}^{n-1} ns(2\mathsf{E}_{0,s} - (n-1)I).
\end{aligned}$$

□

以下の議論では, エルミート行列/自己共役作用素 $\mathsf{E}_{0,s}$ の固有値 λ に対応する固有ベクトル v_0 で $\mathsf{K}_{+,s}$ の Kernel に含まれるものが存在するとする.

そして，$\|v_0\| = 1$ とする．この仮定は $\mathfrak{su}(2)$ の一般の既約歪エルミート表現に対して成立するが，$\mathfrak{su}(1,1)$ の一般の既約歪エルミート表現に対して成立しない．事実，この仮定を全く満たさない歪エルミート表現が存在する．$\mathfrak{su}(1,1)$ の場合は，$\mathsf{K}_{+,-1}$ が非自明な Kernel を持つ代わりに，$\mathsf{K}_{-,-1}$ が非自明な Kernel を持つ場合は，以下の議論は $\mathsf{K}_{+,-1}$ と $\mathsf{K}_{-,-1}$ の役割を入れ替えればそのまま成り立つ．しかし，$\mathfrak{su}(1,1)$ の場合は，$\mathsf{K}_{+,-1}$ も $\mathsf{K}_{-,-1}$ ともに非自明な Kernel を持たない既約歪エルミート表現が存在することが知られている．それらの中には，主系列 (principal series) 表現とよばれるものや，相補系列 (complementary series) 表現とよばれるものがある [16]．本書では，そのようなタイプの既約歪エルミート表現は扱わないので，上記の仮定の下で議論を進める．

(4.10) より，$v_n := \mathsf{K}_{-,s}^n v_0$ は以下を満たす．

$$\mathsf{E}_{0,s} v_n = (\mathsf{K}_{-,s}^n \mathsf{E}_{0,s} + [\mathsf{E}_{0,s}, \mathsf{K}_{-,s}^n]) v_0 = (\mathsf{K}_{-,s}^n \lambda - n\mathsf{K}_{-,s}^n) v_0 = (\lambda - n) v_n.$$

よって，v_n は n に応じて，エルミート行列/自己共役作用素 $\mathsf{E}_{0,s}$ の異なる固有値に対応するので，互いに直交する．さらに，

$$\begin{aligned}\mathsf{K}_{+,s}\mathsf{K}_{-,s} v_{n-1} &= (\mathsf{K}_{-,s}^n \mathsf{K}_{+,s} + [\mathsf{K}_{+,s}, \mathsf{K}_{-,s}^n]) v_0 \\ &= (\mathsf{K}_{-,s}^n \mathsf{K}_{+,s} + \mathsf{K}_{-,s}^{n-1} ns(2\mathsf{E}_{0,s} - (n-1)I)) v_0 \\ &= (\mathsf{K}_{-,s}^{n-1} ns(2\lambda - (n-1))) v_0 = ns(2\lambda - (n-1)) v_{n-1}\end{aligned}$$

となるので，

$$\langle v_{n-1} | \mathsf{K}_{-,s}^\dagger \mathsf{K}_{-,s} | v_{n-1} \rangle = ns(2\lambda - (n-1)) \langle v_{n-1} | v_{n-1} \rangle \tag{4.11}$$

となる．歪エルミート表現の表現空間の内積の性質から，任意の n について $ns(2\lambda - (n-1)) \geq 0$ でなければならない．$n = 1$ のとき，この条件を満たすには，$\lambda s \geq 0$ となる．

そして，$\lambda = 0$ の場合は，$\mathsf{K}_{-,s} v_0 = 0$ となるので，$\mathsf{F}_s^y = \mathsf{F}_s^x = 0$ となる自明な 1 次元歪エルミート表現になる．よって，以下では $\lambda s > 0$ の場合のみ扱う．

$s = 1$ の場合，$\lambda > 0$ となり，2λ が整数の場合，$\mathsf{K}_{-,s} v_{2\lambda} = 0$ となり，$2\lambda + 1$ 次元の既約歪エルミート表現になる．一方，2λ が整数でないとすると，v_n は無限に続き，途中で $(2\lambda - (n-1)s)$ が負の値になる．よって矛盾が生じ，2λ は整数となる．

一方，$s=-1$ の場合，$\lambda<0$ となり，任意の $n\geq 1$ に対して $ns(2\lambda-(n-1))>0$ となる．これは，$\{v_n|n\geq 0\}$ で生成される空間が既約な表現空間となることを意味している．

以下では，$\mathrm{Ker}\,\mathsf{K}_{-,s}$ に属するベクトルの $\mathsf{E}_{0,s}$ の固有値 λ は一意に歪エルミート表現を決定するので，λ を既約歪エルミート表現を表す集合 $\hat{G}$ の要素と見なし，その表現空間を $\mathcal{U}_\lambda$ と書くことにする．特に，考えている Lie 環 $\mathfrak{g}$ を明記する必要があるときは，$\mathcal{U}_\lambda(\mathfrak{g})$ と記す．

さらに，$\langle v_n|v_n\rangle=\langle v_{n-1}|\mathsf{K}_{-,s}^\dagger\mathsf{K}_{-,s}|v_{n-1}\rangle=ns(2\lambda-(n-1))\langle v_{n-1}|v_{n-1}\rangle$ であるので，$\langle v_n|v_n\rangle=n!s(2\lambda-(n-1))s(2\lambda-(n-2))\cdots s(2\lambda)$ となる．よって，$\mathsf{E}_{0,s}$ の固有値が $\lambda-n$ となる正規化したベクトル $|\lambda;\lambda-n\rangle:=\frac{1}{\|v_n\|}v_n$ は $m+1=\lambda-(n-1)$ とすると，$\mathsf{K}_{-,s}|\lambda;m+1\rangle=\mathsf{K}_{-,s}\frac{1}{\|v_{n-1}\|}v_{n-1}=\sqrt{ns(2\lambda-(n-1))}\frac{1}{\|v_n\|}v_n=\sqrt{s(\lambda-m)(\lambda+m+1)}|\lambda;m\rangle$ を満たす．ここで，$\mathsf{E}_{0,s}$ の固有値 $\lambda-n$ を**ウェイト**とよび，$|\lambda;\lambda-n\rangle$ を**ウェイトベクトル**とよぶ．そして以下を得る．

$$\mathsf{E}_{0,s}|\lambda;m\rangle=m|\lambda;m\rangle \tag{4.12}$$

$$\mathsf{K}_{+,s}|\lambda;m\rangle=\sqrt{s(\lambda-m)(\lambda+m+1)}|\lambda;m+1\rangle \tag{4.13}$$

$$\mathsf{K}_{-,s}|\lambda;m\rangle=\sqrt{s(\lambda-m+1)(\lambda+m)}|\lambda;m-1\rangle. \tag{4.14}$$

この議論において，λ はウェイトの中で最大となるので，**最大ウェイト**とよばれ，$\mathcal{U}_\lambda$ を表現空間とする既約歪エルミート表現を一意に定める．したがって，λ を最大ウェイトとする歪エルミート表現を f_λ と記すことにし，λ 自身を既約歪エルミート表現 f_λ を定めるラベル（$\hat{G}$ の要素）とする．なお，量子論では $-\mathsf{E}_{0,s}$ がハミルトニアンとなることが多いが，その場合，固有値 m が固有状態 $|\lambda;m\rangle$ のエネルギーとなる．特に，最大ウェイトの固有状態は，最小エネルギー状態となり，基底状態とよばれる．

注意 4.2.1　無限次元の場合，作用素 X のノルム $\|X\|:=\sup_{x\in\mathcal{H}}\frac{\|Xx\|}{\|x\|}$ が有限である場合，有界線型作用素とよばれ，定義できる．しかし，ノルム $\|X\|:=\sup_{x\in\mathcal{H}}\frac{\|Xx\|}{\|x\|}$ が発散する場合は，作用素 X を $\mathcal{H}$ 全体で定義することはできず，$\mathcal{H}$ の稠密な線型部分空間 $\mathcal{D}(X)$ で定義される．上記の $\mathsf{E}_{0,s}$, $\mathsf{K}_{+,s}$, $\mathsf{K}_{-,s}$, F_s^x, F_s^y, F_s^z のように，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{|e_i\rangle\}_i$ に対して，作用

素 X が定義される場合については，基底の有限線型和で与えられるベクトルからなる線型部分空間上 $\mathcal{H}_0$ で作用素 X が定義できる．作用素 X に対して，グラフノルム $\|x\|_X := \|x\| + \|Xx\|$ を考える．上記の $\mathsf{E}_{0,s}$, $\mathsf{K}_{+,s}$, $\mathsf{K}_{-,s}$, F_s^x, F_s^y, F_s^z の場合，グラフノルムの下で，稠密な $\mathcal{H}$ の線型部分空間上にこれらの作用素の定義を拡大することができる．（閉拡大とよばれる．）このような作用素は可閉作用素とよばれる．このように定義域が拡大された作用素を元の作用素と同一視すると，F_s^x, F_s^y, F_s^z の i 倍は自己共役作用素となる．一般に本書の後の章で現れる無限次元系での作用素は，このように正規直交基底の有限和に対して定義すると可閉作用素となる．また，これらの作用素の中で，正規直交基底についての行列成分が，歪エルミート（エルミート）となるものについては，閉拡大によって得られる作用素が自己共役作用素の i 倍（自己共役作用素）となる．このような議論は煩雑であるので，後の章では省略する．

注意 4.2.2 $\mathfrak{su}(2)$ の $\mathcal{U}_\lambda$ への歪エルミート表現は複素 Lie 環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の複素 Lie 環としての既約表現に拡張できる．しかし，$\mathfrak{su}(1,1)$ の $\mathcal{U}_\lambda$ への歪エルミート表現の場合には，表現空間が無限次元であるので，この議論は成り立たない．なぜなら，無限次元の場合での歪エルミートとならない表現は単純にこの方法では定義できないからである．

4.2.2 Lie 群のユニタリ表現と実表現

$\lambda > 0$ のときは，$\mathcal{U}_\lambda$ への $\mathfrak{su}(2)$ の表現から単連結 Lie 群 SU(2) の表現が exp を考えることで与えられる．よって，$\lambda > 0$ が整数のときは，表現空間 $\mathcal{U}_\lambda$ の次元が奇数となり $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ の基本群の位数 2 と互いに素となる．SU(2) が $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ の基本群の $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ による拡大であるから，補題 2.4.3 より，$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ の表現空間 $\mathcal{U}_\lambda$ への作用は，既約ユニタリ表現となる．一方，λ が半整数のときは，$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ の表現には拡張できない．しかし，2.4 節の最後に述べた議論から U_2 の $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ による中心拡大である SU(2) の表現が存在するので，共通の因子団が存在する．そのため，複数の奇数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対して，直和表現 $\mathsf{f}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathsf{f}_{\lambda_k}$ の射影表現も存在する．$\lambda < 0$ のときは，$\mathcal{U}_\lambda$ への $\mathfrak{su}(1,1)$ の表現から普遍被覆群 $\mathrm{SU}(\tilde{1},1)$ の表現が exp を考えることで与えられる．2λ が整数になる場合のみ，SU(1,1) のユニタリ表現が存在し，それ以外の場合は，SU(1,1) の射影的ユニタリ表現のみが存在する．4λ が奇数に

なる場合は，SU(1,1) のユニタリ表現が存在しないが，二重被覆群 $\check{\mathrm{SU}}(1,1)$ のユニタリ表現が存在する．上記と同様の議論から，複数の奇数 $c_1,\ldots,c_k$ に対して，直和表現 $\mathsf{f}_{c_1/4}\oplus\cdots\oplus\mathsf{f}_{c_k/4}$ の射影表現も存在する．

ここで，既約表現 f_λ の複素共役表現について考えよう．複素共役表現は (4.12)–(4.14) において $\mathsf{E}_{0,s},\mathsf{K}_{\pm,s}$ に $-\mathsf{E}_{0,s},-\mathsf{K}_{\mp,s}$ を代入することで得られる．したがって，$s=1$ のときは同型写像 $|\lambda;m\rangle\mapsto|\lambda;-m\rangle$ の下で，複素共役表現は f_λ と一致する．すなわち，自己共役表現となる．なお，λ が整数のときは，実表現化可能であるが，半整数のときは，実表現化可能でない．一方，$s=-1$ のときは，複素共役表現では，$\mathsf{K}_{+,-1}$ の代わりに，$\mathsf{K}_{-,-1}$ が Kernel を持つことになる．すなわち，f_λ では，表現空間が最大ウェイト表現から生成されたが，その複素共役表現では，表現空間が最小ウェイト表現から生成されることになる．したがって，f_λ は自己共役表現とならない．

4.2.3　Casimir 作用素

次に，この表現での Casimir 作用素の値を求めよう．そのために，Killing form を計算しよう．$x=1,y=2,z=3$ として，基底 F_s^x, F_s^y, F_s^z の下で $\mathsf{ad}(F_s^x)$, $\mathsf{ad}(F_s^y)$, $\mathsf{ad}(F_s^z)$ を行列表示すると以下を得る．

$$\mathsf{ad}(F_s^x)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&s&0\end{pmatrix},\ \mathsf{ad}(F_s^y)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-s&0&0\end{pmatrix},\ \mathsf{ad}(F_s^z)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

すると，Killing form を行列表示すると，

$$[(F_s^a,F_s^b)_{\mathfrak{g}}]_{1\le a,b\le 3}=\begin{pmatrix}-2s&0&0\\0&-2s&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

を得る．すると，f_λ の Casimir 作用素 C_λ は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}C_\lambda&=-\frac{1}{2}(s(\mathsf{F}_s^x)^2+s(\mathsf{F}_s^y)^2+(\mathsf{F}_s^z)^2)\\&=\frac{1}{2}(\mathsf{E}_{0,s}^2+\frac{s}{2}(\mathsf{K}_{+,s}\mathsf{K}_{-,s}+\mathsf{K}_{-,s}\mathsf{K}_{+,s}))\end{aligned}$$

したがって，$C_\lambda v_0 = \frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda)v_0$ であるので，$C_\lambda = \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)$ を得る．ここで，行列に値を持つベクトル $\vec{\mathsf{F}_1} := (\mathsf{F}_1^x, \mathsf{F}_1^y, \mathsf{F}_1^z)$ を考えると，

$$\vec{\mathsf{F}_1}\cdot\vec{\mathsf{F}_1} = -\lambda(\lambda+1) \tag{4.15}$$

を得る．

$s=1(\mathfrak{su}(2))$ の場合は $\lambda>0$ の範囲で λ と $\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)$ は 1 対 1 に対応するので，Casimir 作用素の値から一意に表現が定まる．しかし，$s=-1(\mathfrak{su}(1,1))$ の場合は $-1<\lambda<0$ かつ $\lambda\neq-\frac{1}{2}$ の範囲で λ と $\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)$ は 1 対 1 に対応しない．この事実は致命的であり，Casimir 作用素の値が負の場合，その値から一意に表現が定まらないことを意味するので，表現の形を決定するには，より緻密な議論が必要となることになる．

すなわち，$\mathfrak{su}(2)$ の場合は，Casimir 作用素 C_{f} で与えられる物理量を測ることで，既約分解に対応する測定ができるが，$\mathfrak{su}(1,1)$ の場合は，Casimir 作用素 C_{f} で与えられる物理量を測っても，既約分解に対応する測定ができるとは限らない．この方法では，同じ Casimir 作用素の値を実現する 2 つの既約成分を区別することはできない．

4.2.4 テンソル積

一般に，2 つの量子系が与えれた場合，その合成系はテンソル積空間となる．そのため，同じ群 SU(2) または SU(1,1) による変換がある 2 つの量子系が与えられた場合，テンソル積空間には，そのテンソル積表現に対応する変換が現れる．群によりテンソル積空間にどのような変換が施されるか調べるには，テンソル積空間への表現の既約分解が必要となる．

そのために，以下では，$\mathcal{U}_{\lambda_1}\otimes\mathcal{U}_{\lambda_2}$ への生成元 F_s^a の表現が $\mathsf{F}_s^a\otimes I + I\otimes\mathsf{F}_s^a$ で与えられている場合を考える．なお，テンソル積 $|\lambda_1;m_1\rangle\otimes|\lambda_2;m_2\rangle$ は $|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle$ と記すことにする．

$\mathfrak{su}(2)$ の場合，

$$\mathcal{U}_{\lambda_1}(\mathfrak{su}(2))\otimes\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathfrak{su}(2)) = \bigoplus_{|\lambda_1-\lambda_2|\le\lambda\le\lambda_1+\lambda_2}\mathcal{U}_\lambda(\mathfrak{su}(2)) \tag{4.16}$$

となる．ただし，ここで，λ は $|\lambda_1-\lambda_2|, |\lambda_1-\lambda_2|+1,\ldots,\lambda_1+\lambda_2$ をとる．これは以下のように確認できる．$\mathcal{U}_{\lambda_1}\otimes\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathfrak{su}(2))$ では，$\mathsf{E}_{0,1}$ の固有値

$\lambda_1+\lambda_2$ の固有空間は $|\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2\rangle$ で張られる 1 次元空間である．このベクトルは $\mathcal{U}_{\lambda_1+\lambda_2}(\mathfrak{su}(2))$ の生成元になる．固有値 $\lambda_1+\lambda_2-1$ の固有空間は $|\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1-1,\lambda_2\rangle$ と $|\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2-2\rangle$ で生成される 2 次元空間である．そして，$\mathsf{K}_{-,1}|\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda_2\rangle$ と直交する状態が異なる表現空間 $\mathcal{U}_{\lambda_1+\lambda_2-1}(\mathfrak{su}(2))$ の生成元となる．$\mathsf{E}_{0,1}$ の固有値 $\lambda_1+\lambda_2-2$ の固有空間は 3 次元になり，その固有空間から，表現空間 $\mathcal{U}_{\lambda_1+\lambda_2-2}(\mathfrak{su}(2))$ の生成元を選ぶ．この議論を固有値 $|\lambda_1-\lambda_2|$ まで繰り返す．そして，固有値が $|\lambda_1-\lambda_2|$ を超えると固有空間の次元は増加しなくなる．この議論から (4.16) を得る．

一方，$\mathfrak{su}(1,1)$ の場合も同様に，固有値を 1 つずつ減らす方向に同種の議論を続ける．すると，いつまでも固有空間の次元は増加する．よって，以下を得る．

$$\mathcal{U}_{\lambda_1}\otimes\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathfrak{su}(1,1))=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}_{\lambda_1+\lambda_2-n}(\mathfrak{su}(1,1)).$$

なお，(4.16) の右辺のベクトル空間は基底 $\{|\lambda;m\rangle\}_{|\lambda_1-\lambda_2|\le\lambda\le\lambda_1+\lambda_2,|m|\le\lambda}$ で生成されている．このとき，$\mathcal{U}_{\lambda_1}(\mathfrak{su}(1,1))\otimes\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathfrak{su}(1,1))$ の要素 $|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle$ は上記の基底で次のように表される．

$$|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle=\sum_{\lambda,m}|\lambda;m\rangle\langle\lambda;m|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle.$$

この係数 $\langle\lambda;m|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle$ は位相因子の不定性があるが，$\langle\lambda;\lambda|\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,\lambda-\lambda_1\rangle>0$ を満たすように基底ベクトルの位相因子を定めることとする．このとき，係数 $\langle\lambda;m|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle$ を **Clebsh-Gordan 係数**とよぶこととする．この係数は常に実数になり，以下の対称性の関係が成り立つことが知られている [24, 13 章, Appendix C].

$$\begin{aligned}\langle\lambda;m|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle&=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2-\lambda}\langle\lambda;m|\lambda_2,\lambda_1;m_2,m_1\rangle\\&=(-1)^{\lambda_1+\lambda+m_2}\sqrt{\frac{2\lambda+1}{2\lambda_1+1}}\langle\lambda_1;m_1|\lambda,\lambda_2;m,-m_2\rangle\\&=(-1)^{\lambda_2-\lambda-m_1}\sqrt{\frac{2\lambda+1}{2\lambda_2+1}}\langle\lambda_2;m_2|\lambda_1,\lambda;-m_1,m\rangle\\&=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2-\lambda}\langle\lambda;-m|\lambda_1,\lambda_2;-m_1,-m_2\rangle.\end{aligned}\tag{4.17}$$

例えば，以下のように計算できることが知られている．

例 4.2.3 $M=\pm\lambda$ のとき，以下が成り立つ [24, Appendix C].

$$
\begin{aligned}
&\langle\lambda;\lambda|\lambda_1,\lambda_2;m_1,m_2\rangle=\langle\lambda;-\lambda|\lambda_2,\lambda_1;-m_2,-m_1\rangle\\
&=(-1)^{\lambda_1-m_1}\\
&\times\sqrt{\frac{(2\lambda+1)!(\lambda_1+\lambda_2-\lambda)!(\lambda_1+m_1)!(\lambda_2+m_2)!}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda+1)!(\lambda+\lambda_1-\lambda_2)!(\lambda+\lambda_2-\lambda_1)!(\lambda_1-m_1)!(\lambda_2-m_2)!}}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

ここで，$\lambda=m_1+m_2$ である．したがって，(4.17) を用いると，$m_1=\pm\lambda_1$ のとき，以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\langle\lambda;m|\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,m_2\rangle=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2-\lambda}\langle\lambda;-m|\lambda_1,\lambda_2;-\lambda_1,-m_2\rangle\\
&=\sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\lambda_1)!(\lambda+\lambda_2-\lambda_1)!(\lambda+m)!(\lambda_2-m_2)!}{(\lambda+\lambda_2+\lambda_1+1)!(\lambda_1+\lambda-\lambda_2)!(\lambda_1+\lambda_2-\lambda)!(\lambda-m)!(\lambda_2+m_2)!}}.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

ここで，$\lambda_1=m+m_2$ である．

例 4.2.4 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ のとき以下が成り立つ [24, Appendix C].

$$
\begin{aligned}
&\langle\lambda;m|\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1,m_2\rangle\\
&\quad=\sqrt{\frac{(2\lambda_1)!(2\lambda_2)!(\lambda+m)!(\lambda-m)!}{(2\lambda)!(\lambda_1+m_1)!(\lambda_1-m_1)!(\lambda_2+m_2)!(\lambda_2-m_2)!}}.
\end{aligned}
$$

4.2.5 コヒーレントベクトル

次に，群 SU(2) または SU(1,1) による表現が与えられた量子系で，基底状態が群の作用によりどのような状態に変換されるか調べることにする．$H=\{e^{i\theta \mathsf{E}_{0,s}}\}$ を固定化群とする等質空間 $\hat{\mathbb{C}}$, D の要素 ζ に基づいて，**コヒーレントベクトル**を定義する [13][1]．このコヒーレントベクトルが基底状態の軌

[1] ここでの su(1,1) の場合のコヒーレントベクトルの定義は，Perelomov[29] によるものと異なる．

道となる．4.1 節の (4.3), (4.4) に従って，ζ に対して，$\xi \in \mathbb{C}, \eta \in \mathbb{R}$ を選ぶと，$\exp(\xi K_{+,s} - \bar{\xi} K_{-,s})$) は Lie 群 SU(2) または SU(1,1) の要素になり，

$$\begin{aligned} \mathsf{U}_{\zeta,s} &:= \mathsf{f}_\lambda(\exp(\xi K_{+,s} - \bar{\xi} K_{-,s})) = \exp(\xi \mathsf{K}_{+,s} - \bar{\xi} \mathsf{K}_{-,s}) \\ &= \exp(\zeta \mathsf{K}_{-,s}) \exp(\eta \mathsf{E}_{0,s}) \exp(-\bar{\zeta} \mathsf{K}_{+,s}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

が成り立つ．なお，$\mathsf{U}_{\infty,1}$ は $\exp(\frac{\pi}{2}(\mathsf{K}_{+,s} - \mathsf{K}_{-,s}))$ とする．U_ζ と最大ウェイトベクトル $|\lambda;\lambda\rangle$ を用いて，コヒーレントベクトル $|\lambda:\zeta\rangle := \mathsf{U}_\zeta|\lambda;\lambda\rangle$ を定義する．$\exp(\eta\lambda) = (1+s|\zeta|^2)^{-\lambda}$ であるので，コヒーレントベクトル $|\lambda:\zeta\rangle$ は

$$\begin{aligned} |\lambda:\zeta\rangle &= (1+s|\zeta|^2)^{-\lambda} \exp(\zeta \mathsf{K}_{-,s})|\lambda;\lambda\rangle \\ &= (1+s|\zeta|^2)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{*} \frac{(\zeta \mathsf{K}_{-,s})^n}{n!} |\lambda;\lambda\rangle \end{aligned}$$

と書ける．ここで，$s=1$ のとき $*$ は 2λ とし，$s=-1$ のとき $*$ は ∞ とする．

コンパクトな等質空間である Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の正規化された不変測度 $\mu_{\hat{\mathbb{C}}}$ は $\zeta = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}$ とすると，$\mu_{\hat{\mathbb{C}}}(d\zeta) = \frac{dxdy}{2\pi(1+|\zeta|^2)^2}$ となる．$\lambda > 0$ に対して，$\mathcal{U}_\lambda$ の次元は $2\lambda+1$ であり，$|\lambda;\lambda\rangle\langle\lambda;\lambda|$ は固定化群 H_1 の作用に関して不変であるので，(3.55) より，

$$(2\lambda+1)\int_{\hat{\mathbb{C}}} |\lambda:\zeta\rangle\langle\lambda:\zeta| \frac{dxdy}{2\pi(1+|\zeta|^2)^2} = I \tag{4.21}$$

となる．一方，もう 1 つ等質空間である単位円板 D 上の不変測度 μ_D は $\mu_D(d\zeta) = \frac{dxdy}{2\pi(1-|\zeta|^2)^2}$ となる．$\lambda < -\frac{1}{2}$ に対して，$|\lambda;\lambda\rangle\langle\lambda;\lambda|$ は固定化群 H_{-1} の作用に関して不変であるので，(3.55) より，

$$-(2\lambda+1)\int_D |\lambda:\zeta\rangle\langle\lambda:\zeta| \frac{dxdy}{2\pi(1-|\zeta|^2)^2} = I \tag{4.22}$$

となる．なお，$-\frac{1}{2} \le \lambda < 0$ のときは，上記の積分は発散する．$-\frac{1}{2} > \lambda$ のときは，$\mathcal{U}_\lambda$ の形式的次元は $-(2\lambda+1)$ となる．

したがって，$\lambda > 0$ または $\lambda < -\frac{1}{2}$ のときは，両者をまとめて，Θ_s 上の不変測度が $\mu_{\Theta_s}(d\zeta) = \frac{dxdy}{2\pi(1+s|\zeta|^2)^2}$ となり，(4.21), (4.22) は以下にまとめられる．

$$s(2\lambda+1)\int_{\Theta_s} |\lambda:\zeta\rangle\langle\lambda:\zeta| \mu_{\Theta_s}(d\zeta) = I. \tag{4.23}$$

この式は，$s(2\lambda+1)$ が正の値である限り，コヒーレント状態が測定を与えることを示している．この測定は，対称性が高いため等方的な性質が望まれる情報処理には大変都合が良い．

4.3 SU(r) と U(r) の既約ユニタリ表現

4.3.1 SU(r) の既約ユニタリ表現

一般次元のユニタリ群 U(r) や SU(r) による変換もしばしば量子系に現れる．本節では，SU(r) の既約なユニタリ表現を扱うために，$\mathfrak{su}(r)$ の歪エルミート表現を扱う．Lie 群 SU(r) は単連結であるので，実 Lie 環 $\mathfrak{su}(r)$ の歪エルミート表現がそのまま，Lie 群 SU(r) のユニタリ表現となり，$\hat{\mathrm{SU}(r)}$ の要素となる．そして，複素 Lie 環 $\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C})$ の既約表現は，ここで与える実 Lie 環 $\mathfrak{su}(r)$ の表現をそのまま複素係数に拡大すれば得られる．そして，複素 Lie 群 SL($r,\mathbb{C}$) は単連結であるので，ここで得られる表現から，その表現も得られる．

Lie 環 $\mathfrak{su}(r)$ の表現を扱うため，その対角な成分からなる部分 Lie 環を $\mathfrak{sd}(r)$ と記す．($\mathfrak{d}$ は d のドイツ文字を表す．) この部分 Lie 環は後の節で定義される極大 Cartan 部分代数である．4.2 節の F_1^x, F_1^y, F_1^z の拡張として，

$$F_{j,l}^x := \frac{i}{2}(|l\rangle\langle j| + |j\rangle\langle l|), \quad 1 \le j < l \le r \tag{4.24}$$

$$F_{j,l}^y := \frac{1}{2}(|j\rangle\langle l| - |l\rangle\langle j|), \quad 1 \le j < l \le r \tag{4.25}$$

$$F_{j,l}^z := -i(|j\rangle\langle j| - |l\rangle\langle l|), \quad j = 1,\ldots,r-1 \tag{4.26}$$

を定義する．$\mathfrak{sd}(r)$ の基底は $\{F_{j,j+1}^z\}_{j=1}^{r-1}$ で与えられ，$\{F_{j,l}^x, F_{j,l}^y\}_{1\le j<l\le r}$ を加えることで，$\mathfrak{su}(r)$ の基底系が得られる．そして，$\mathfrak{su}(r)$ の $\mathcal{H}$ への既約歪エルミート表現 f に対して，$\mathfrak{su}(2)$ の表現と同じように，$\mathsf{E}_j := -i\mathsf{f}(F_{j,j+1}^z)$，$\mathsf{K}_{j,l;\pm} := -i\mathsf{f}(F_{j,l}^x) \mp \mathsf{f}(F_{j,l}^y)$ を定義する．$E_j := -|j\rangle\langle j| + |j+1\rangle\langle j+1|$，$K_{j,l;+} := |l\rangle\langle j|$, $K_{j,l;-} := |j\rangle\langle l|$ とすると，形式的に，$\mathsf{E}_j := \mathsf{f}(E_j)$, $\mathsf{K}_{j,l;\pm} := \mathsf{f}(K_{j,l;\pm})$ と定義することも可能である．

$\mathfrak{sd}(r)$ はトレースが 0 となる対角行列を $-i$ 倍したものの集合で与えられることに注意して，$1 \le j < l \le r$ に対して，$\mathfrak{sd}(r)$ の双対空間 $\mathfrak{sd}(r)^*$ の要素 $\boldsymbol{\alpha}_{j,l}$ を以下で定義する．

$$\boldsymbol{\alpha}_{j,l}(X) := i(\langle j|X|j\rangle - \langle l|X|l\rangle). \tag{4.27}$$

すると，

$$[\mathsf{E}_{j'}, \mathsf{E}_j] = 0 \tag{4.28}$$

$$[\mathsf{E}_{j'}, \mathsf{K}_{j,l;\pm}] = \pm\boldsymbol{\alpha}_{j,l}(F^z_{j',j'+1})\mathsf{K}_{j,l;\pm} \tag{4.29}$$

$$[\mathsf{K}_{j,l;+}, \mathsf{K}_{j,l;-}] = \mathsf{E}_j + \cdots + \mathsf{E}_{l-1}$$

が成り立つ．そして，表現の歪エルミート性から $(\mathsf{K}_{j,l;+})^\dagger = \mathsf{K}_{j,l;-}$ および，E_j のエルミート性が得られる．よって，(4.28) より，$\mathcal{H}$ は $\mathfrak{so}(r)$ の要素について同時固有空間に分解できる．したがって，固有値は $\mathfrak{so}(r)$ の双対空間 $\mathfrak{so}(r)^*$ の要素 $\boldsymbol{m}$ を用いて記述できる．この固有空間の組に対応する同時固有空間を $\mathcal{U}^w_{\boldsymbol{m}}$ と記す．すなわち，以下で与えられる．

$$\mathcal{U}^w_m := \{v \in \mathcal{H} \,|\, \mathsf{f}(X)v = im(X)v,\ \forall X \in \mathfrak{so}(r)\}.$$

$\mathcal{U}^w_m \neq \{0\}$ となる $m \in \mathfrak{so}(r)^*$ の要素を**ウェイト**とよぶ．$\mathfrak{so}(r)$ の基底 $F^z_{1,2}, \ldots, F^z_{r-1,r}$ を用いて，$\boldsymbol{m}$ をベクトル表示したもの $[m_1, \ldots, m_{r-1}] := [\boldsymbol{m}(F^z_{1,2}), \ldots, \boldsymbol{m}(F^z_{r-1,r})]$ を **Dynkin 指数**とよぶ．このとき，集合 $\Phi := \{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}, -\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1\le j<l\le r}$ を**ルート系**とよび，その要素を**ルート**とよぶ．そして，ルート $\boldsymbol{\alpha}_{j,j+1}$ を $\boldsymbol{\alpha}_j$ と書くことにし，その集合 $\Delta := \{\boldsymbol{\alpha}_j\}_{1\le j\le r-1}$ を**基本系**とよび，その要素を**単純ルート**とよぶ．$\Phi^+ := \{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1\le j<l\le r}$ と $\Phi^- := \{-\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1\le j<l\le r}$ の要素のことをそれぞれ**正のルート**，**負のルート**とよぶ．このとき，$\Phi^+ = \{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1\le j<l\le r}$ の要素は全て，単純ルートの正の整数和で与えられる．

基本系の要素 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ の Dynkin 指数を以下のように上から順に並べたものを **Cartan 行列**とよぶ．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

このとき，(4.29) より，$v \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{m}}^{w}$ に対して，$\mathsf{K}_{j,l;\pm}v$ が 0 でない場合，$\mathsf{K}_{j,l;\pm}v$ は $\mathcal{U}_{\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}^{w}$ の要素となる．任意の既約な歪エルミート表現空間に $\mathcal{H}$ に対して，ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ で以下を満たすものが一意にとれる．

(1) $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は 1 次元空間.

(2) $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の要素 v_0 は $\mathsf{K}_{j,l;+}v_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$ となる.

このようなウェイトのことを**最大ウェイト**とよぶ．この表現空間は $\left\{\prod_{1\le j<l\le r} \mathsf{K}_{j,l;-}^{n_{j,l}} v_0\right\}_{\{n_{j,l}\}}$ で生成され，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ から一意に定まる．$\boldsymbol{\lambda}$ を最大ウェイトとする歪エルミート表現が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{\lambda}$ の Dynkin 指数の成分が全て非負の整数であることである．この必要十分条件は Lie 群 SU(r) の表現として考えた場合と Lie 環 $\mathfrak{su}(r)$ の表現として考えた場合の両方において正しい．

先にも述べたように，SU(r) は普遍被覆群であるので，ここで与えた $\mathfrak{su}(r)$ の既約歪エルミート表現 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は SU(r) の既約ユニタリ表現を与える．ゆえに，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ を既約表現を表す集合 $\hat{\mathrm{SU}}(r)$ の要素と見なし，その表現空間を $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{SU}(r))$ と記すことにする．

$\mathfrak{su}(r)$ の行列をそのまま与えると，表現空間を $\mathbb{C}^r$ とする歪エルミート表現が得られるが，この表現は**基本表現**とよばれる．この表現の最大ウェイトは $[1,0,\ldots,0]$ となる．また，表現 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1,\ldots,\lambda_{r-1}]$ に対し，その複素共役表現は $\boldsymbol{\lambda}^* = [\lambda_{r-1},\ldots,\lambda_1]$ となる．例えば，最大ウェイトが $[1,\ldots,1]$ となる表現は自己共役表現となる．自己共役表現の 1 例である随伴表現の最大ウェイトは $\boldsymbol{\lambda} = [1,0,\ldots,0,1]$ となる．n 次の**対称テンソル表現**と n 次の**反対称テンソル表現**の最大ウェイトはそれぞれ，$[n,0,\ldots,0,0]$, $[0,0,\ldots,0,n]$ となる．

一般に，このような群の表現が与えられた量子系では，ハミルトニアンは $-\mathsf{E}_i$ の非負の和で与えられることが多い．その場合，最小エネルギー状態となる基底状態は最大ウェイトベクトル $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ で与えられる．そのため，基底状態の群の作用による軌道が興味あるところである．そのために，$|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}|$ を不変にする SU(r) の部分群を H が重要である．この場合，基底状態の軌道は，SU(r) によって，特徴付けられるのではなく，等質空間 $\Theta := \mathrm{SU}(r)/H$ によって，特徴付けられる．すなわち，$\theta \in \Theta$ に対して，その代表元 g_θ を用いて，コヒーレント状態 $|\boldsymbol{\lambda},\theta\rangle$ は以下のように与えられる．

$$|\boldsymbol{\lambda}, \theta\rangle := \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g_\theta)|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}\rangle. \tag{4.31}$$

さらに，等質空間 Θ 上での全測度が 1 となる不変測度 μ_Θ について以下の式が成り立つ．

$$d_{\boldsymbol{\lambda}} \int_\Theta |\boldsymbol{\lambda}, \theta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}, \theta|\mu_\Theta(d\theta) = I. \tag{4.32}$$

この式は，g を $\mathrm{SU}(r)$ の任意の要素としたとき，左辺が $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)$ と可換となることから Schur の補題（補題 2.3.2）を用いて示すことができる．したがって，コヒーレント状態を用いて，対称性の高い測定を与えることができる．

4.3.2　U(r) の既約ユニタリ表現

次に，Lie 群 $\mathrm{U}(r)$ の既約表現について扱う．Lie 環 $\mathfrak{u}(r)$ 表現についても，その対角な成分からなる部分 Lie 環に注目する．その部分 Lie 環は $\mathfrak{sd}(r)$ に $-iI$ から生成される 1 次元空間を加えた空間 $\mathfrak{d}(r)$ である．このとき，$\mathfrak{d}(r)$ の基底は

$$F_j^{z,u} := -i|j\rangle\langle j|, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{4.33}$$

で与えられる．

$\mathfrak{d}(r)$ 要素は可換であるので，同時固有空間 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{m}}^w := \{v \in \mathcal{H} | \mathsf{f}(X)v = im(X)v, \forall X \in \mathfrak{d}(r)\}$ を定義する．$\mathcal{U}_m^w \neq \{0\}$ となる $m \in \mathfrak{d}(r)^*$ の要素を $\mathfrak{u}(r)$ の表現の**ウェイト**とよぶ．$\mathfrak{d}(r)$ の基底 $F_1^{z,u}, \ldots, F_r^{z,u}$ を用いて，ウェイト $\boldsymbol{m}$ をベクトル表示したもの $(m_1, \ldots, m_{r-1}) := (\boldsymbol{m}(F_1^{z,u}), \ldots, \boldsymbol{m}(F_r^{z,u}))$ を **Young 指数**とよぶ．Young 指数の成分は ( ) で表し，Dynkin 指数の成分は [ ] で表す．U(1) と同型な部分群 $\{e^{\theta F_j^{z,u}}\}$ の表現を考えることにより，ウェイトの Young 指数の成分は整数であることが確認できる．埋め込み $in : \mathfrak{sd}(r) \hookrightarrow \mathfrak{d}(r)$ の双対写像 $in^* : \mathfrak{d}(r)^* \to \mathfrak{sd}(r)^*$ に注目すると，$m = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathfrak{d}(r)^*$ は $in^*(m) = [m_1 - m_2, \ldots, m_{r-1} - m_r] \in \mathfrak{sd}(r)^*$ を満たす．

部分群 $\mathrm{SU}(r)$ の表現を考えることから，$\mathfrak{su}(r)$ の表現と同じように，Lie 群 $\mathfrak{u}(r)$ の既約ユニタリ表現は $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{d}(r)^*$ のうち，$in^*(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathfrak{sd}(r)^*$ が上述の条件 **(1)(2)** を満たすもの（$\mathrm{U}(r)$ の表現についての**最大ウェイト**とよばれる）によって決まる．そして，Lie 環 $\mathfrak{u}(r)$ は $\mathfrak{su}(r) \oplus \mathfrak{u}(1)$ と同型であるので，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{d}(r)^*$ が Lie 環 $\mathfrak{u}(r)$ の既約歪エルミート表現を与えるための

必要十分条件は $in^*(\boldsymbol{\lambda})$ の Dynkin 指数の各成分 $\lambda_j - \lambda_{j+1}$ が非負の整数であることである．そして，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{d}(r)^*$ が U(r) の既約ユニタリ表現を与えるために必要十分条件は上記の条件に加え，その Young 指数の全ての成分 λ_j が整数となることである．以下，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ を既約表現を表す集合 $\hat{\mathrm{U}(r)}$ の要素と見なし，その表現空間を表現空間を $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{U}(r))$ と記すことにする．特に，全ての λ_j が非負の整数となる場合は，U(r) の既約ユニタリ表現の最大ウェイトとなる $\boldsymbol{\lambda}$ は深さが r の Young diagram で与えられる．表現空間 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{U}(r))$ の個々の基底は Young diagram $\boldsymbol{\lambda}$ の Semistandard Young tableau で表すことができる．基底の $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(F_j^{z,u})$ の固有値は対応する Semistandard Young tableau に含まれる j の数で与えられる．

U(r) の既約ユニタリ表現と SU(r) の既約ユニタリ表現の関係を 2.4 節の議論を用いて考えよう．Lie 群 SU(r) の中心化群 $C(\mathrm{SU}(r))$ は U_r となる．$\omega := e^{i2\pi/r}I \in C(\mathrm{SU}(r))$ とすると，2.4 節の記号を用いると Lie 群 U(r) は $\overline{\mathrm{SU}(r)}_\omega$ と一致する．Lie 群 U(r) の要素は $g \in \mathrm{SU}(r)$ と $\theta \in [0, 2\pi/r)$ を用いて $(g, e^{i\theta})$ と記述できる．

最大ウェイトが $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{d}(r)^*$ となる Lie 群 U(r) の既約ユニタリ表現 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対して，表現を部分 Lie 群 SU(r) に制限したとき，$\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(\omega) = e^{i2\pi l/k}I$ となるように整数 l を選ぶ．すると，$\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は整数 $n \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g, e^{i\theta}) = \mathsf{f}_{in^*(\boldsymbol{\lambda})}(g)e^{i\theta(nr+l)} \tag{4.34}$$

と表せる．このとき，$nr + l = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j$ となる．

4.3.3 既約表現空間の次元

$\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{SU}(r))$ の次元は Semistandard Young tableau の数 $|Y_{U,r}(\boldsymbol{n})|$ に等しく，以下で与えられる

$$\dim \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{U}(r)) = |\mathcal{T}_{u,r}(\boldsymbol{n})| = \prod_{1 \le j < l \le r} \frac{l - j + n_l - n_j}{l - j}. \tag{4.35}$$

2 つ目の式は **Weyl の次元公式**として知られている [8, Theorem 7.1.7]．この式を SU(r) の表現に適用すると，

$$\dim \mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{SU}(r)) = \prod_{1 \le j < l \le r} \frac{l - j + \sum_{t=j}^{l-1} \lambda_t}{l - j} \tag{4.36}$$

となる．なお，最大ウェイトでない，ウェイト $\boldsymbol{m}$ に対応する固有空間 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{m}}$ の次元は必ずしも 1 とは限らない．

例えば，$r=3$ のとき，

$$\dim \mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{SU}(3)) = \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\lambda_2+1)}{2}$$

となり，$r=4$ のとき，

$$\begin{aligned}&\dim \mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{SU}(4)) \\ &\quad = \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)(\lambda_2+1)(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_3+1)}{2!3!}\end{aligned}$$

となる．一般の r であっても，Dynkin 指数の 3 つ目以降の成分が 0 である場合には以下のように，計算できる．

$$\dim \mathcal{U}_{[\lambda_1,\lambda_2,0,\ldots,0]}(\mathrm{SU}(r)) = \frac{(\lambda_1+r-1)!(\lambda_1+\lambda_2+r-2)!(\lambda_2+1)}{(r-1)!(r-2)!(\lambda_1+1)!(\lambda_1+\lambda_2)!}.$$

これを Young 指数で記述すると，

$$\dim \mathcal{U}_{(\lambda_1,\lambda_2,0,\ldots,0,0)}(\mathrm{U}(r)) = \frac{(\lambda_1+r-1)!(\lambda_2+r-2)!(\lambda_1-\lambda_2+1)}{(r-1)!(r-2)!(\lambda_1+1)!\lambda_2!} \tag{4.37}$$

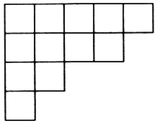
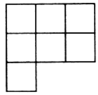
となる．

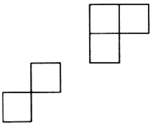
4.3.4　テンソル積

次に $\mathrm{U}(r)$ の 2 つの既約な歪エルミート表現 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}'}$ のテンソル積表現の既約分解を考えよう．簡単のため，$\boldsymbol{\lambda}$ と $\boldsymbol{\lambda}'$ の成分は全て非負の整数とする．(2.32) で与えた重複度係数 $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は

$$\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathrm{U}(r)) \otimes \mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r)) = \bigoplus_{\boldsymbol{n}\in Y_n^r} \mathbb{C}^{C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))} \otimes \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{U}(r)) \tag{4.38}$$

を満たし，**Littlewood-Richardson 係数**とよばれる．ここで，$n := |\boldsymbol{\lambda}|+|\boldsymbol{\lambda}'|$ である．この係数は以下のように 3 つの Young diagram $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}'$, $\boldsymbol{n}$ の関係から求められる．$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ に対して，Young diagram $\boldsymbol{n}$ から Young diagram $\boldsymbol{\lambda}$ を除いた図形として，**skew diagram** $\boldsymbol{n}\setminus\boldsymbol{\lambda}$ を定義する．例えば，$\boldsymbol{n}=[5,4,2,1]$,

$\boldsymbol{\lambda} = [3,3,1]$ のとき,  から  を除いて得られる図形

 として, skew diagram $\boldsymbol{n} \setminus \boldsymbol{\lambda}$ が定義される.

そして, skew diagram $\boldsymbol{n} \setminus \boldsymbol{\lambda}$ に, 1 から r までの数字を以下のルールに従って入れる. その数字の入れ方の数が Littlewood-Richardson 係数 $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ と一致する. この事実は Littlewood-Richardson 法則とよばれる [23, p.68].

(1) skew diagram $\boldsymbol{n} \setminus \boldsymbol{\lambda}$ に数字 j が入っている数は λ'_j 個である.

(2) skew diagram $\boldsymbol{n} \setminus \boldsymbol{\lambda}$ 内の各列の中の数字は上から下へ狭義に増加する.

(3) skew diagram $\boldsymbol{n} \setminus \boldsymbol{\lambda}$ 内の各行の中の数字は左から右へ増加する.

(4) skew diagram $\boldsymbol{n} \setminus \boldsymbol{\lambda}$ 内の箱に以下のように順番を付ける. 最初の $n_1 - \lambda_1$ 個までの順序は, 第 1 行の要素を右から順番に順序を付ける. 次に, 第 2 行の要素を同じ方法で並べる. これを繰り返し, $|\boldsymbol{n}| - |\boldsymbol{\lambda}|$ 番目までの順序を付ける. このとき, 任意の $0 \le m \le |\boldsymbol{n}| - |\boldsymbol{\lambda}|$ について, m 番目までの箱の中の数字に注目したとき, 数字 j の箱の数が数字 $j+1$ の箱の数以上である.

例 4.3.1 $\boldsymbol{\lambda}' = (1, 0, \ldots, 0)$ の場合, $\boldsymbol{n} \in Y^r$ が以下の 2 条件を満たすとき, Littlewood-Richardson 係数 $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は 1 となり, それ以外のときは, $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は 0 となる : (1) $\boldsymbol{n}$ の成分のうち 1 つの成分 n_i について, $n_i = \lambda_i + 1$ となる. (2) $\boldsymbol{n}$ の他の成分 n_j については $n_j = \lambda_j$ となる.

例 4.3.2 $\boldsymbol{\lambda}'$ が $(1, \ldots, 1, 0)$ の場合, $\boldsymbol{n} \in Y^r$ が以下の 2 条件を満たすとき, Littlewood-Richardson 係数 $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は 1 となり, それ以外のときは, $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は 0 となる : (1) $\boldsymbol{n}$ の成分のうち 1 つの成分 n_i について, $n_i = \lambda_i$ となる. (2) $\boldsymbol{n}$ の他の成分 n_j については $n_j = \lambda_j + 1$ となる.

例 4.3.3 $\boldsymbol{\lambda} = (m, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{\lambda}' = (n, 0, \ldots, 0)$ $(m \ge n)$ の場合, Littlewood-Richardson 係数 $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は $\boldsymbol{n} = (n+m-k, k, 0, \ldots, 0)$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ のとき, 1 となり, それ以外のとき 0 となる. すなわち,

$$\mathcal{U}_{(m,0,\ldots,0)}(\mathrm{U}(r)) \otimes \mathcal{U}_{(n,0,\ldots,0)}(\mathrm{U}(r)) = \bigoplus_{k=0}^{n}(\mathcal{U}_{(m+n-k,k,0,\ldots,0)}(\mathrm{U}(r)) \tag{4.39}$$

となる.

例 4.3.4　$\boldsymbol{\lambda}'$ が随伴表現 $(2,1,\ldots,1,0)$ の場合, (1) $\boldsymbol{n}$ の全ての成分 n_i について, $n_i = \lambda_i + 1$ のとき. $n_i > n_{i+1}$ を満たす i の個数が $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ に一致する. (2) $\boldsymbol{n}$ のある成分 n_i について, $n_i = \lambda_i + 2$ となり, もう 1 つの異なるある成分 n_j について, $n_j = \lambda_j$ となり, 残りの成分 n_l については, $n_l = \lambda_l + 1$ となる. このとき, $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は 1 となる. **(3)** 上記以外のときは $C^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}(\mathrm{U}(r))$ は 0 となる.

例 4.3.5　$\boldsymbol{\lambda} = (m,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{\lambda}' = (n,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{\lambda}'' = (1,0,\ldots,0)$, $m \geq n$ の場合を考えよう. 以下の議論はでは $\mathrm{U}(r)$ は省略する. $r=2$, $m=n$ のときは

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}_{(n,0)} \otimes \mathcal{U}_{(n,0)} \otimes \mathcal{U}_{(1,0)}\\ &\quad = \mathcal{U}_{(2n+1,0)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n}(\mathcal{U}_{(2n+1-k,k)} \otimes \mathbb{C}^2)\end{aligned} \tag{4.40}$$

となり, $r=2$, $m>n$ のときは

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}_{(m,0)} \otimes \mathcal{U}_{(n,0)} \otimes \mathcal{U}_{(1,0)}\\ &\quad = \mathcal{U}_{(m+n+1,0)} \oplus \mathcal{U}_{(m,n+1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n}(\mathcal{U}_{(m+n+1-k,k)} \otimes \mathbb{C}^2)\end{aligned}$$

となる. $r \geq 3$, $m=n$ のときは

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}_{(n,0,\ldots,0)} \otimes \mathcal{U}_{(n,0,\ldots,0)} \otimes \mathcal{U}_{(1,0,\ldots,0)}\\ &\quad = \mathcal{U}_{(2n+1,0,\ldots,0)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n}(\mathcal{U}_{(2n+1-k,k,0,\ldots,0)} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n}\mathcal{U}_{(2n-k,k,1,\ldots,0)}\end{aligned} \tag{4.41}$$

となり, $r \geq 3$, $m>n$ のときは

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{U}_{(m,0,\ldots,0)} \otimes \mathcal{U}_{(n,0,\ldots,0)} \otimes \mathcal{U}_{(1,0,\ldots,0)} \\
&\quad = \mathcal{U}_{(m+n+1,0,\ldots,0)} \oplus \mathcal{U}_{(m,n+1,\ldots,0)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} (\mathcal{U}_{(m+n+1-k,k,0,\ldots,0)} \otimes \mathbb{C}^2) \\
&\qquad \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{U}_{(m+n-k,k,1,0,\ldots,0)}
\end{aligned}
$$

となる.

4.3.5 SL($r, \mathbb{C}$), GL($r, \mathbb{C}$) の既約表現

SU(r) の既約ユニタリ表現は SL($r, \mathbb{C}$) の複素 Lie 群としての既約表現に拡張でき，U(r) の既約ユニタリ表現は GL($r, \mathbb{C}$) の複素 Lie 群としての既約表現に拡張できる．この場合，GL($r, \mathbb{C}$) のユニタリでない要素が物理的に意味のある変換を与えるわけではないが，以下の議論は，合成系上の密度行列を扱う上で大変役に立つ．$g \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ は対角化可能であり，その固有値 $a_1, \ldots, a_r$ が全て異なるとき，表現 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{n}}$ の指標は $\boldsymbol{\delta} := (r-1, r-2, \ldots, 0)$ を用いて，**Weyl の指標公式**

$$
\chi_{\boldsymbol{n}}(g) = \frac{\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{l=1}^{r} a_l^{n_{\sigma(l)}+\delta_{\sigma(l)}}}{\prod_{j<l}(a_j - a_l)} \tag{4.42}
$$

によって与えられる [8, Theorem 7.1.1]．右辺を固有値 $a_1, \ldots, a_r$ の関数として考えたものは **Schur 関数**とよばれ，$\chi_{\boldsymbol{n}}(a_1, \ldots, a_r)$ と記す.

4.4 複数の量子系からなる合成系

4.4.1 識別可能な場合：Schur 双対性

Lie 群 SU(r) または U(r) の 要素 g に対して，$g^{\otimes n} := \underbrace{g \otimes \cdots \otimes g}_{n}$ を考えることで，合成系 $(\mathbb{C}^r)^{\otimes n}$ への SU(r) のユニタリ表現が得られる．これは，$\mathbb{C}^r$ と同じ量子系が互いに識別可能な状況で n 個独立に与えられたとき，n 個全てに同じ変換が施される状況を扱っている．このような変換が実際に存在する場合には，以下の議論は意味があるが，そういう変換が存在しない場合でも，以下に述べる対称性を考えることで合成系 $(\mathbb{C}^r)^{\otimes n}$ に関して有益な知見が得られる.

このユニタリ表現は SU(r) の n 階**テンソル積表現**という．先の節では，$\boldsymbol{n} \in Y^{r-1}$ に対して，U(r) の既約ユニタリ表現 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{U}(r))$ および，SU(r) の既約ユニタリ表現 $\mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{U}(r))$ を与えた．一方，置換群 S_n に対して，$(\mathbb{C}^r)^{\otimes n}$ への以下のユニタリ表現 f_n を考える．

$$\mathsf{f}_n(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes \cdots \otimes v_{g(n)}, \quad \forall g \in S_n. \tag{4.43}$$

したがって，この2つのユニタリ表現を組み合わせることで，直積群 SU$(r) \times S_n$ または U$(r) \times S_n$ の $(\mathbb{C}^r)^{\otimes n}$ への **Schur 双対**とよばれるユニタリ表現が得られる．

$r=2$ の場合，$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の 2^n 個ある基底を，$\mathsf{E}_{0,+1}$ についてのウェイト別に並べてみよう．この場合，ウェイトが m となる基底の数は $\binom{n}{m}$ である．$n=4$ の場合，m をウェイトとし，λ を最大ウェイトとすると，$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 4}$ の基底は以下の図の箱で表すことができる．そして，$\mathfrak{su}(2)$ の作用は，箱を上下に動かす作用となる．$\mathsf{K}_{+,+1}$ は箱を上に動かし，$\mathsf{K}_{-,+1}$ は箱を下に動かす．一方，置換群 S_4 は同じウェイトの基底を横の線の範囲で動かす．したがって，上下の矢印が $\mathfrak{su}(2)$ の既約な表現空間になり，左右の矢印が S_4 の既約な表現空間になる．すなわち，既約な表現空間は λ を用いて分類することができる．

以下，具体的に各表現空間の要素を構成しよう．$\mathbb{C}^2$ 内のウェイトが $m=1/2$ のベクトルを $|\uparrow\rangle$ とし，ウェイトが $m=-1/2$ のベクトルを $|\downarrow\rangle$ とする．そして，一番左の $\mathfrak{su}(2)$ の表現空間（最大ウェイトが $\lambda=2$ の表現空間）は対称テンソル積空間となり，この空間のウェイトが $m=1$ となる要素は $|\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow\rangle + |\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow\rangle + |\uparrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow\rangle + |\uparrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow\rangle$ となる．したがって，最大ウェイトが $\lambda=1$ の表現空間のウェイト $m=1$ の要素は上記のベクトルと直交するウェイト $m=1$ ベクトルとなる．最大ウェイトが $\lambda=1$ の表現空間のウェイト $m=0$ の要素はこのベクトルに $\mathsf{K}_{-,+1}$ を作用したものになる．最大ウェイトが $\lambda=0$ の表現空間の要素はウェイト $m=0$ のもののみである．この要素は，最大ウェイトが $\lambda=2$ の表現空間のウェイト $m=0$ のベクトルおよび最大ウェイトが $\lambda=1$ の表現空間のウェイト $m=0$ のベクトルと直交するウェイト $m=0$ のベクトルである．一般の n の場合も，同じようにして各表現空間の要素を与えることができる．

一般の r の場合，直積群 SU$(r) \times S_n$ のユニタリ表現に関する $(\mathbb{C}^r)^{\otimes n}$ の既約分解は以下のように得られる．

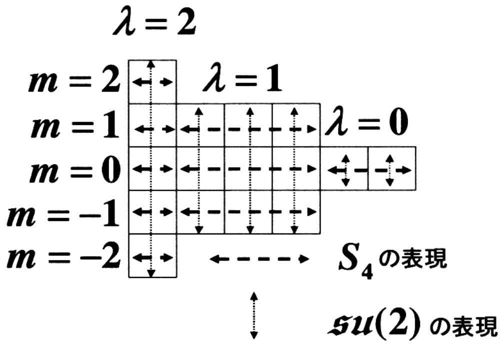


図 4.1　$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 4}$ の既約分解

$$(\mathbb{C}^r)^{\otimes n} = \bigoplus_{\boldsymbol{n}\in Y_n^r} \mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r)) \otimes \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n) \tag{4.44}$$

$$= \bigoplus_{\boldsymbol{n}\in Y_n^r} \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{SU}(r) \times S_n). \tag{4.45}$$

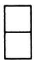
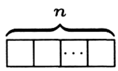
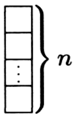
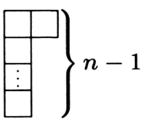
このとき, $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(\mathrm{SU}(r)\times S_n)$ が $\boldsymbol{n} \in Y_n^r$ で特徴付けられる直積群 $\mathrm{SU}(r)\times S_n$ の既約な表現空間 $\mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r))\otimes\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ となる. その既約空間において, S_n は $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ にのみ作用し, $\mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r))$ への作用は全て単位行列で与えられる. 同様に, $\mathrm{SU}(r)$ は $\mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r))$ にのみ作用し, $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ への作用は全て単位行列で与えられる. したがって, S_n のユニタリ表現 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ の重複度は $\mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r))$ の次元で与えられ, $\mathrm{SU}(r)$ のユニタリ表現 $\mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r))$ の重複度は, $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ の次元で与えられる. これらの次元は (4.36) と (2.58) で与えられる.

特に, $\boldsymbol{n} = (n, 0, \ldots, 0)$ となる場合は, $\mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ は 1 次元空間となり, $(\mathbb{C}^r)^{\otimes n}$ の部分空間 $\mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r)) \otimes \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n) \cong \mathcal{U}_{in^*(\boldsymbol{n})}(\mathrm{SU}(r))$ は n 次の**対称テンソル積空間**と一致する.

なお, テンソル積表現は $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ の複素 Lie 群としての表現に自然に拡張できる. このとき, $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ と S_n の作用による既約分解は同じく (4.44) によって与えられる.

既約分解 (4.45) は各既約成分への射影を $P_{\boldsymbol{n}}$ とすると, 測定 $\{P_{\boldsymbol{n}}\}$ を与えていることになる. それぞれの系での状態が同一の密度行列 ρ で与えられる

表 4.1　Young diagram と表現（以下では $r \geq n$ とする）.

名称	Young diagram	$\mathcal{U}(\mathfrak{su}(r))$ の Young 指数	$\mathcal{U}(\mathfrak{su}(r))$ の Dynkin 指数	$\mathcal{U}(\mathfrak{su}(r))$ の次元	$\mathcal{U}(S_n)$ の次元
基本表現		$(1,0,\dots,0)$	$[1,0,\dots,0]$	r	1
2 階対称テンソル積表現		$(1,1,0,\dots,0)$	$[0,1,0,\dots,0]$	$\frac{r(r-1)}{2}$	1
n 階対称テンソル積表現		$(n,0,\dots,0)$	$[n,0,\dots,0]$	$\binom{n+r-1}{r-1}$	1
n 階反対称テンソル積表現		$(\overbrace{1,\dots,1}^{n}, 0,\dots,0)$	$[\overbrace{0,\dots,0}^{n-1}, 1,0,\dots,0]$	$\binom{r}{n}$	1
随伴表現 ($n=r-1$ のときの名称)		$(2,\overbrace{1,\dots,1}^{n-1}, 0,\dots,0)$	$[1,\overbrace{0,\dots,0}^{n-2}, 1,0,\dots,0]$	n^2-1	$n-1$

とき，合成系上の密度行列は $\rho^{\otimes n}$ で与えられる．ρ が 0 固有値を持たないとすると，$\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ の要素と見なせる．そのため，上記の測定を行ったときに測定値 $\boldsymbol{n}$ が得られる確率は

$$\operatorname{Tr} P_{\boldsymbol{n}}\rho^{\otimes n} = \operatorname{Tr} \mathsf{f}_{\boldsymbol{n}}(\rho) \cdot \operatorname{Tr} \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n) \tag{4.46}$$

となる．$\operatorname{Tr} \mathsf{f}_{\boldsymbol{n}}(\rho)$ は指標であり，その計算公式は (4.42) で与えられる．一方，$\operatorname{Tr} \mathcal{U}_{\boldsymbol{n}}(S_n)$ については，(2.58) でその計算公式は与えられる．このように，表現論で得られる公式が物理的に重要な値の計算に役立っている．

4.4.2　識別不能な場合

個々の粒子の量子系が $\mathcal{H}$ であり，それらが互いに識別可能である場合での合成系は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ で与えられることはすでに述べた．しかし，$\mathcal{H}$ が内部自由度を表す量子系であっても，全く同じ位置に複数の粒子があると，それらを識別することはできない．このような場合，合成系は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ とならない．代わりに 2 種類の合成系の記述がある．1 つ目は，複数の粒子が同時に $\mathcal{H}$ の同一の状態

となることが可能な場合であり，もう 1 つは複数の粒子が同時に $\mathcal{H}$ の同一の状態となることがない場合である．前者が成り立つか，後者が成り立つかは，その粒子の種類によって決まっており，前者の性質を持つ粒子は Bose 粒子とよばれ，後者の性質を持つ粒子は Fermi 粒子とよばる．前者の例としては，光のなす粒子である光子が挙げられ，後者の例としては，電子が挙げられる．

量子系 $\mathcal{H}$ に，n 個の Bose 粒子がある場合の量子系は，$\mathcal{H}$ の n 階の対称テンソル積表現の表現空間となる．この空間は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の中で粒子の入れ替えを表す置換群の作用に関して，不変な要素からなる部分空間である．

一方，量子系 $\mathcal{H}$ に，n 個の Fermi 粒子がある場合の量子系は，$\mathcal{H}$ の n 階の反対称テンソル積表現の表現空間となる．この空間は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の中で粒子の入れ替えを表す置換群の作用に関して，奇置換の場合に符号だけが入れ替わる要素からなる部分空間である．

4.5 Lie 群と等質空間の離散化

4.5.1 群上のデザイン

3.7 節では，Lie 群 G 全体に値を持つ不変測度 μ_G を考えた．不変測度 μ_G を用いた量子情報処理があるものの，実際に全ての G に値を持つ処理を行うことは困難を伴うことが多い．そのため，G の部分集合にのみ値を持つ測度など，μ_G と異なる測度 μ' を用いることが考えられる．しかし，測度 μ' が μ_G と同じ性能を持つということをどのように定義したらよいであろうか？ もちろん，どのような状況でも完全に一致するには，μ_G と全く同じ測度を用いるしかない．不変測度 μ_G は様々な状況で利用されるが，多くの場合，特定の目的にのみ利用されるので，その目的のためには，不変測度 μ_G が持つ一部の性質さえ満たせば十分である．したがって，異なる測度 μ' に置き換えて問題がないか否か判断するには，その特定の性質を表現論の言葉で定式化する必要がある．現時点では，具体的な応用を与えていないので数学的な定義のみを与える．なお，Lie 群 G が非コンパクトである場合は，不変測度が存在するとは限らないので，以下の議論では，不変測度が存在する Lie 群 G についてのみ考える．

初めに以下の定理を与える．

定理 4.5.1　G 上の測度 ν と G の表現 f について，以下の条件は同値である．ただし，表現空間 $\mathcal{H}$ が無限次元となるときは，その全ての既約成分は形式的次元を持つとする．

(1)　$\int_G \mathsf{f}(g)\otimes\mathsf{f}(g)^\dagger\mu_G(dg)=\int_G \mathsf{f}(g)\otimes\mathsf{f}(g)^\dagger\nu(dg)$.

(2)　任意の行列 X について $\int_G \mathsf{f}(g)X\mathsf{f}(g)^\dagger\mu_G(dg)=\int_G \mathsf{f}(g)X\mathsf{f}(g)^\dagger\nu(dg)$ が成り立つ．（表現空間が無限次元の場合は，任意のトレースクラス作用素 X について上の式が成り立つ．）

(3)　任意のエルミート行列 X について $\int_G \mathsf{f}(g)X\mathsf{f}(g)^\dagger\mu_G(dg)=\int_G \mathsf{f}(g)X\mathsf{f}(g)^\dagger\nu(dg)$ が成り立つ．（表現空間が無限次元の場合は，任意のトレースクラス自己共役作用素 X について上の式が成り立つ．）

証明.　任意の行列 X は2つのエルミート行列 X_1, X_2 を用いて，$X_1+X_2 i$ と表せる．したがって，条件 **(2)** と **(3)** は同値となる．

次に **(1)** から **(2)** を示す．v_1,v_2,v_3,v_4 を $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の任意のベクトルとする．**(1)** が成り立つとき，行列 $|v_1\rangle\langle v_2|\otimes|v_3\rangle\langle v_4|$ との積のトレースが等しい．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\int_G \mathsf{f}(g)\otimes\mathsf{f}(g)^\dagger\mu_G(dg)|v_1\rangle\langle v_2|\otimes|v_3\rangle\langle v_4| \\
&=\int_G \langle v_2|\mathsf{f}(g)|v_1\rangle\langle v_4|\mathsf{f}(g)^\dagger|v_3\rangle\mu_G(dg) \\
&=\langle v_2|\,\mathrm{Tr}\int_G \mathsf{f}(g)|v_1\rangle\langle v_4|\mathsf{f}(g)^\dagger\mu_G(dg)|v_3\rangle. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\langle v_2|\int_G \mathsf{f}(g)|v_1\rangle\langle v_4|\mathsf{f}(g)^\dagger\mu_G(dg)|v_3\rangle=\langle v_2|\int_G \mathsf{f}(g)|v_1\rangle\langle v_4|\mathsf{f}(g)^\dagger\nu(dg)|v_3\rangle \qquad (4.48)
$$

となる．v_3, v_2 は任意であるので，

$$
\int_G \mathsf{f}(g)|v_1\rangle\langle v_4|\mathsf{f}(g)^\dagger\mu_G(dg)=\int_G \mathsf{f}(g)|v_1\rangle\langle v_4|\mathsf{f}(g)^\dagger\nu(dg) \qquad (4.49)
$$

を得る．任意の行列 X は $|v_1\rangle\langle v_4|$ という形の行列の線型和で書けるので，**(2)** を得る．

次に **(2)** から **(1)** を示す．v_1, v_2, v_3, v_4 を $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の任意のベクトルとする．**(1)** を示すには，行列 $|v_1\rangle\langle v_2| \otimes |v_3\rangle\langle v_4|$ との積のトレースが等しいことを示せば十分である．**(2)** より，(4.49) が成り立つ．したがって，(4.48) が成り立つ．したがって，(4.47) を用いると，$|v_1\rangle\langle v_2| \otimes |v_3\rangle\langle v_4|$ との積のトレースが等しいことがわかる． □

G 上の測度 ν が G の表現 f の下で，この定理の条件を満たすとき，**f-design** とよぶ．条件 **(1)** に注目することで以下の補題が確認できる．

補題 4.5.2 群 G 上の測度 ν と G 上の要素 g に対して，群 G 上の測度 ν_g を $\nu_g(B) := \nu(gB)$ で定義する．このとき，以下は同値である．

(1) ν は f-design である．

(2) ν_g は f-design である．

特に，G の有限部分集合 G' について，G' の counting 測度を $|G|$ で割った測度 $\mu_{G'}$ が f-design であるとき，G' を **f-design** とよぶ．また，$\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$-design を **$\boldsymbol{\lambda}$-design** と記す．部分集合 $S \subset \hat{G}$ の全ての要素 $\boldsymbol{\lambda}$ について $\boldsymbol{\lambda}$-design となる部分集合 $G' \subset G$ を **S-design** と記す．

補題 4.5.3 ν が S-design であるとき，$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}' \in S$ について

$$\int_G \chi_{\boldsymbol{\lambda}}(g)\overline{\chi_{\boldsymbol{\lambda}'}(g)}\nu(dg) = \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'}$$

が成り立つ．また，$\boldsymbol{\lambda}' \in S$ であり，$\{\boldsymbol{\lambda}''' \in \hat{G} \,|\, C^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}''}_{\boldsymbol{\lambda}'''} \neq 0\} \subset S$ であるとき，

$$\int_G \chi_{\boldsymbol{\lambda}}(g)\chi_{\boldsymbol{\lambda}''}(g)\overline{\chi_{\boldsymbol{\lambda}'}(g)}\nu(dg) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}''' \in \hat{G}} C^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}''}_{\boldsymbol{\lambda}'''}\delta_{\boldsymbol{\lambda}''',\boldsymbol{\lambda}'}$$

が成り立つ．

補題 4.5.4 G をコンパクト Lie 群とし，f を有限次元表現とする．G の有限部分群 G' が f-design であることと，表現 f を G' への制限したものの既約分解が，G の表現についての f の既約分解と一致することは同値である．

証明. $\mathcal{K}$ を 0 でない $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ を G' への制限したときの任意の既約な部分空間とする．$u \in \mathcal{K}$ について，

$$\int_{G'} \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)|u\rangle\langle u|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)^\dagger \mu_{G'}(dg) = \frac{\|u\|^2}{d_{\mathcal{K}}} I_{\mathcal{K}} \tag{4.50}$$

が成り立つ．ここで，$d_{\mathcal{K}}$ は $\mathcal{K}$ の次元を表す．一方，u を含む G の既約空間を $\mathcal{K}'$ とし，その次元を $d_{\mathcal{K}'}$ とすると，

$$\int_{G} \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)|u\rangle\langle u|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)^\dagger \mu_{G}(dg) = \frac{\|u\|^2}{d_{\mathcal{K}'}} I_{\mathcal{K}'} \tag{4.51}$$

となる．

したがって，G' が f-design である場合，両者は一致するので，f を G' への制限したときの既約分解は，f の既約分解と一致する．

一方，f の既約成分が f を G' へ制限した表現でも既約とする．任意のエルミート行列は行列 $|u\rangle\langle u|$ の線型和で書けるので，任意のベクトル $u \in \mathcal{H}$ を選び，行列 $|u\rangle\langle u|$ について，

$$\int_{G} \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)|u\rangle\langle u|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)^\dagger \mu_{G}(dg) = \int_{G} \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)|u\rangle\langle u|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)^\dagger \nu(dg) \tag{4.52}$$

を示せば十分である．u を既約表現空間の要素に分解する．すると，$u = \sum_j u_j$ を得る．ここで，u_j を含む既約空間を $\mathcal{K}_j$ とし，その次元を d_j とする．すると，

$$\int_{G} \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)|u\rangle\langle u|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)^\dagger \mu_{G}(dg) = \sum_j \frac{\|u_j\|^2}{d_j} I_{\mathcal{K}_j}$$

となる．この右辺の形は既約分解の形にのみ依存するので，(4.52) を得る．□

f が d 次元空間 $\mathcal{H}$ 上の表現であるとき，$X \mapsto \mathsf{f}(g)X\mathsf{f}(g)^\dagger$ は $\mathcal{H}$ の完全正写像となることに注意しよう．この完全正写像からなる凸集合の次元は $d^4 - d^2$ であるので，この凸集合対して以下の Caratheodory の定理（定理 4.5.5）を適用すると，G の $d^4 - d^2 + 1$ 個の要素に support を持つ確率分布 p で f-design となるものが存在する．なお，類似の結論は異なる手法で [11] でも示されている．

定理 4.5.5（Caratheodory の定理 [38, Section 17]）　X を次元 m の凸集合とし，凸集合 X がその端点集合 $\mathrm{Ext}(X)$ の凸包で与えられるとする．任意の

要素 $x \in X$ に対して，適切な $m+1$ 個の X の端点 $x_1, \ldots, x_{m+1} \in \mathrm{Ext}(X)$ と，その上の確率分布 p を選ぶと，$x = \sum_{i=1}^{m+1} p(i) x_i$ が成り立つ．

補題 4.5.4 の証明を詳しく見ると，以下のように一般化できる．

系 4.5.6 G をコンパクト Lie 群とし，f を有限次元表現とする．有限群 G'' から Lie 群 G への写像 $\tilde{\mathsf{f}}$ が与えられ，$\mathsf{f} \circ \tilde{\mathsf{f}}$ が射影的表現であるとする．このとき，G の有限部分集合 $\tilde{\mathsf{f}}(G'')$ が f-design であることと，G'' の射影的表現 $\mathsf{f} \circ \tilde{\mathsf{f}}$ の既約分解が，G の表現 f の既約分解と一致することは同値である．

次に，G が $\mathrm{SU}(d)$ の場合に制限しよう．G 上の測度 ν または部分群 G' が表現 $\mathsf{f}_{t_1,t_2}(g) := g^{\otimes t_1} \otimes (g^{\otimes t_2})^\dagger$ について，f_{t_1,t_2}-design であるとき，(t_1, t_2)**-design** と記す．

また，$\mathrm{SU}(d)$ 上の測度 ν について，(t_1, t_2)-design であることと，任意の $\mathbb{C}^d$ 上の行列の組 $X_1, \ldots, X_{2t_1+2_2}$ について以下の式が成り立つことは同値である．

$$
\begin{aligned}
&\int_G \mathrm{Tr}\, X_1 g X_2 g \cdots X_{t_1} g X_{t_1+1} g^\dagger \cdots X_{t_1+t_2} g^\dagger X_{t_1+t_2+1} g^\dagger \\
&\qquad \cdots X_{2t_1+t_2} g^\dagger X_{2t_1+t_2+1} g \cdots X_{2t_1+2t_2} g \mu_G(dg) \\
= &\int_G \mathrm{Tr}\, X_1 g X_2 g \cdots X_{t_1} g X_{t_1+1} g^\dagger \cdots X_{t_1+t_2} g^\dagger X_{t_1+t_2+1} g^\dagger \\
&\qquad \cdots X_{2t_1+t_2} g^\dagger X_{2t_1+t_2+1} g \cdots X_{2t_1+2t_2} g \nu(dg).
\end{aligned}
$$

X_i を $|u_i\rangle\langle v_i|$ の形で書ける場合を考え，定理 4.5.1 の証明と同じように証明できる．したがって，$\mathrm{SU}(d)$ 上の測度 ν について，(t_1, t_2)-design であることと，$(t_1 + t_2, 0)$-design であることは同値となる．

表現 $\mathsf{f}_{1,1}$ は Dynkin 指数を用いると，最大ウェイトが $[1, 0, \ldots, 0, 1]$ となる表現（表現空間の次元は $d^2 - 1$ 次元）と，最大ウェイトが $[0, 0, \ldots, 0, 0]$ となる表現（表現空間の次元は 1 次元）の直和に分解できる．一方，表現 $\mathsf{f}_{2,0}$ は Dynkin 指数を用いると，最大ウェイトが $[2, 0, \ldots, 0, 0]$ となる表現（表現空間の次元は $d(d+1)/2$ 次元）と，最大ウェイトが $[1, 1, \ldots, 0, 0]$ となる表現（表現空間の次元は $d(d-1)/2$ 次元）の直和に分解できる．よって，$\mathrm{SU}(d)$ 上の測度 ν について，$[1, 0, \ldots, 0, 1]$-design であることと，$[2, 0, \ldots, 0, 0]$-design かつ $[1, 1, \ldots, 0, 0]$-design となることは同値となる．すなわち，$\mathrm{SU}(d)$ または

$\mathrm{U}(d)$ の部分群 G' について，表現 $\mathsf{f}_{[1,0,\ldots,0,1]}$ を G' に制限したものが既約であることと，表現 $\mathsf{f}_{[2,0,\ldots,0,0]}$ と表現 $\mathsf{f}_{[1,1,\ldots,0,0]}$ を G' に制限したものがともに既約であることは同値となる．

4.5.2　等質空間上のデザイン

ここまでは，群 G についての離散化を扱ったが，コヒーレント状態を与える等質空間 Θ についても同じように，離散化を考えることができる．この場合，Θ の上の不変測度の代わりとなる Θ 上の測度 ν を考える．Lie 群 G の既約表現 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の下で，Θ 上の測度 ν が

$$d_{\boldsymbol{\lambda}} \int_{\Theta} |\boldsymbol{\lambda} : \theta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda} : \theta| \nu(d\theta) = I_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{4.53}$$

を満たすとき，ν を $\boldsymbol{\lambda}$-design とよぶことにする．（無限次元表現の場合は，形式的次元が存在すると仮定する．）特に，Θ の有限部分集合 Θ' について，counting 測度が $\boldsymbol{\lambda}$-design であるとき，Θ' を **$\boldsymbol{\lambda}$-design** とよぶ．

例えば，Lie 群 G の $\boldsymbol{\lambda}$-design となる有限部分群 G' が与えられたとき，$\theta_0 \in \Theta$ の G' の軌道 $\{g\theta_0 \,|\, g \in G'\}$ は等質空間 Θ の部分集合として，$\boldsymbol{\lambda}$-design となる．

Θ を $\mathrm{SU}(d)$ の基本表現のコヒーレント状態のなす集合であるときについて考える．Θ 上の測度 ν が

$$\int_{\Theta} |u\rangle\langle u|^{\otimes t_1} \otimes |\overline{u}\rangle\langle\overline{u}|^{\otimes t_2} \nu(d\theta) = \int_{\Theta} |u\rangle\langle u|^{\otimes t_1} \otimes |\overline{u}\rangle\langle\overline{u}|^{\otimes t_2} \mu_{\Theta}(d\theta) \tag{4.54}$$

を満たすとき，ν を (t_1, t_2)**-design** とよぶことにする．Θ の有限部分集合 Θ' について，counting 測度が $\boldsymbol{\lambda}$-design であるとき，Θ' を (t_1, t_2)**-design** とよぶ．

G がコンパクト群のとき，表現 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の表現空間の次元 $d_{\boldsymbol{\lambda}}$ は有限となる．このとき，等式 (5.38) により，行列 I は $\{|\boldsymbol{\lambda} : \theta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda} : \theta|\}_{\theta}$ で生成される凸集合に含まれる．また，この凸集合の次元は高々 $d_{\boldsymbol{\lambda}}^2 - 1$ である．したがって，その凸集合と行列 I に定理 4.5.5 を適用すると，Θ の $d_{\boldsymbol{\lambda}}^2$ 個の要素に support を持つ確率分布 p で $\boldsymbol{\lambda}$-design となるものが存在する．

そして，(4.54) において，空間 $\mathbb{C}^{t_2}$ についてのみ転置する操作を Γ とすると，$\Gamma(|u\rangle\langle u|^{\otimes t_1} \otimes |\overline{u}\rangle\langle\overline{u}|^{\otimes t_2}) = |u\rangle\langle u|^{\otimes t_1 + t_2}$ となる．この事実に注意すると，

(t_1, t_2)-design の条件式と $(t_1 + t_2, 0)$-design の条件式は互いに写像 Γ で移りあうため以下の定理を得る.

定理 4.5.7 Θ の上の測度 ν が (t_1, t_2)-design であることと, $(t_1 + t_2, 0)$-design であることは同値である.

さらに以下の定理が知られている [21, 22, 33, 14, 5].

定理 4.5.8 Θ の上の測度 ν が $(t, 0)$-design であるとする. このとき, $|\operatorname{supp}(\nu)| \geq \binom{d+\lceil t/2 \rceil - 1}{\lceil t/2 \rceil}^2$ が成り立つ. 等号が成り立つとき, $|u\rangle \in \operatorname{supp}(\nu)$ について, $\nu(|u\rangle) = 1/|\operatorname{supp}(\nu)|$ が成り立つ. すなわち, ν は $\operatorname{supp}(\nu)$ の等しい重みを持つ分布となる.

4.5.3 近似的なデザイン

一般には, 任意の表現 f について f-design を見つけることが容易でない場合も多い. また, 折角見つけた f-design もその構成が複雑で実用的でないこともある. そのため, 近似的に実現することが考えられる. 近似の精度を測る方法として, 行列 (作用素) ノルムを用いる方法と, トレースノルムを用いる方法があり, ここでは両方の場合について述べる. G の表現 f が与えられたとき, G 上の測度 ν が以下を満たすとき, 近似的トレースノルム ϵ f-design という.

$$\left\| \int_G \mathsf{f}(g) \otimes \mathsf{f}(g)^\dagger \mu_G(dg) - \int_G \mathsf{f}(g) \otimes \mathsf{f}(g)^\dagger \nu(dg) \right\|_{\mathrm{Tr}} \leq \epsilon.$$

同様に, G 上の測度 ν が以下を満たすとき, 近似的行列 (作用素) ノルム ϵ f-design という.

$$\left\| \int_G \mathsf{f}(g) \otimes \mathsf{f}(g)^\dagger \mu_G(dg) - \int_G \mathsf{f}(g) \otimes \mathsf{f}(g)^\dagger \nu(dg) \right\| \leq \epsilon.$$

Θ 上の測度 ν についても, 以下の (4.55) を満たすとき, 近似的トレースノルム ϵ $\boldsymbol{\lambda}$-design といい, 以下の (4.56) を満たすとき, 近似的行列 (作用素) ノルム ϵ $\boldsymbol{\lambda}$-design という.

$$\left\| d_{\boldsymbol{\lambda}} \int_{\Theta'} |\boldsymbol{\lambda} : \theta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda} : \theta| \nu(d\theta) - I_{\boldsymbol{\lambda}} \right\|_{\mathrm{Tr}} \leq \epsilon \tag{4.55}$$

$$\left\| d_{\boldsymbol{\lambda}} \int_{\Theta'} |\boldsymbol{\lambda} : \theta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda} : \theta| \nu(d\theta) - I_{\boldsymbol{\lambda}} \right\| \leq \epsilon \tag{4.56}$$

第 5 章

一般の Lie 群と Lie 環の表現

5.1　ルート系とその分類*

これまでは，特定のタイプの Lie 群，Lie 環について議論を行ってきたが，以下では，より一般の Lie 群，Lie 環について扱う．最初に，一般のコンパクト半単純 Lie 環について扱う．4.3 節では，ルート系を用いて，$\mathfrak{su}(r)$ の既約歪エルミート表現を扱った．以下では，ルート系を用いることで，一般のコンパクト半単純 Lie 環を扱う．そのために，本節ではルート系の一般的な定義を与えその性質を扱う．

定義 5.1.1　一般に，正定値な内積 $(\cdot,\cdot)$ が定義された実ベクトル空間 V の部分集合 Φ が以下の条件を満たすとき，Φ は**ルート系**とよばれる．その要素は**ルート**とよばれる．

(R1)　$|\Phi| < \infty$ であり，Φ は 0 を含まず，V を張る．

(R2)　任意の $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi$ に対して，$-\boldsymbol{\alpha} \in \Phi$ であるが，$\pm 2\boldsymbol{\alpha}, \pm 3\boldsymbol{\alpha}, \ldots$ は Φ の要素ではない．

(R3)　$\mathfrak{h}_0^*$ の要素 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ に対して，双線型形式 $\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle := \frac{2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}$ と定義すると，任意の $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in \Phi$ に対して，$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \rangle$ は整数となる．

(R4)　写像 $W_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}) := \boldsymbol{\beta} - \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \boldsymbol{\alpha}$ に関して，Φ は閉じている．

ここで，$\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$ は必ずしも対称とは限らないことに注意せよ．そして，ルー

ト系 Φ について，写像の集合 $\mathcal{W} := \{W_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi}$ は群となり，**Weyl 群**とよばれる．

ルート系については，以下の定理が知られている [34, p.101 定理 2][17, 10.1 節]．

定理 5.1.2　任意のルート系 Φ に対して，以下の条件を満たす**基本系**とよばれる部分集合 $\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ が存在する．

(B1)　Δ はベクトル空間 V の基底系となる．

(B2)　任意の $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi$ に対して，$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{j=1}^{r} m_j \boldsymbol{\alpha}_j$ となり，m_j は全て正の整数になるか，全て負の整数になるかのどちらかである．

定義 5.1.3　ルート系 $\Phi \subset V$ とその基底系 $\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ に対して，Δ の要素を**単純ルート**とよび，Δ の正（負）の係数和で与えられる Φ の要素を**正のルート**（**負のルート**）とよび，その集合を $\Phi^+(\Delta)$（$\Phi^-(\Delta)$）と記す．なお，基底系 Δ を省略しても混乱を生じない場合は，(Δ) を省略することとする．

基底系 Δ の下で，$\boldsymbol{\beta} \in V$ に対するベクトル表示 $[\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1\rangle, \ldots, \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_r\rangle]$ を **Dynkin 指数**とよぶ．さらに，$c_1, \ldots, c_r \geq 0$ を用いて，$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} = \sum_{j=1}^{r} c_j \boldsymbol{\alpha}_j$ と書けるとき，$\boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{\gamma}$ と記す．$\geq$ は**半順序**の条件を満たす．

命題 5.1.4　[34, p.102 定理 3][17, 10.1 節]　ルート系 $\Phi \subset V$ に対して，$\boldsymbol{\alpha} \in \Phi$ が $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq 0$ を満たす $\boldsymbol{\beta} \in V$ を 1 つ選んだとき，

$$\Phi^+ = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) > 0\} \tag{5.1}$$

を満たすように基底系 Δ を選ぶことができる．逆に，基底系 Δ に対して，(5.1) を満たす $\boldsymbol{\beta} \in V$ が存在する．

ルート系 Φ の基底系 $\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}_j\}_{j=1}^{r}$ に対して，行列 $M := (\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'}\rangle)$ は **Cartan 行列**とよばれる．j 番目の基底系の要素 $\boldsymbol{\alpha}_j$ の Dynkin 指数は Cartan 行列の j 番目の（横の）列で与えられる．そして，条件 **(R1-4)** より，任意の $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in \Phi$ について $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}'\rangle$ は 0, ±1, ±2, ±3 のどれかの値をとることが示せる [34, p.100][17, 9.4 節]．特に，$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\alpha}'$ がともに基底系の要素であれば，$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}') \leq 0$ となることが知られているので [34, p.102] [17, 10.1 節]，$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}'\rangle$ は $0, -1, -2, -3$ のどれかの値をとる．したがって，Cartan 行列の対角成分

は 2 となり，非対角成分は $0, -1, -2, -3$ のどれかの値をとる．

以下 Cartan 行列について調べる．特に，$l \neq l'$ について $\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle$ が -2 または -3 のときは，$\langle \boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle$ は -1 となることが知られている [34, p.100 表] [17, 9.4 節 Table 1]．この分類のため，各 $\boldsymbol{\alpha}_l$ を点とし，点と点を以下のルールに従って結ぶ．$\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = -1$ のときは，1 本の線を結ぶ．$\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle = -2, \langle \boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = -1$ のときは，2 本の線を結び，l の方が大きいという意味で不等号 $>$ をその上に書く．これは，$(\boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_l) > (\boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_{l'})$ を意味している．$\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle = -3, \langle \boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = -1$ のときは，3 本の線を結び，l の方が大きいという意味で不等号 $>$ をその上に書く．このような図形は **Dynkin diagram** とよばれる．特に，Dynkin diagram はその全ての点が繋がっているとき，**連結**とよぶ．ルート系 Φ に対応する Dynkin diagram が連結であるとき，そのルート系 Φ は連結であるという．

命題 5.1.5 [34, p.108 補題 8][17, 10.4 節 Lemma A] 連結なルート系 Φ の要素の中で**最大ルート**とよばれる最大のルート $\boldsymbol{\lambda}(\Phi)$ が存在する．すなわち，条件 $\boldsymbol{\lambda}(\Phi) \geq \boldsymbol{\alpha}$, $(\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Phi)$ を満たす $\boldsymbol{\lambda}(\Phi) \in \Phi$ が存在する．

連結な Dynkin diagram は図 5.1 に示す A_r, B_r, C_r, D_r, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 に限られる [34, p.113 定理 1][17, 11.4 節 Theorem]．図 5.1 からわかるように $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$ となる．

また A_r についての Cartan 行列 $M = (\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle)$ は (4.30) で与えられたものに等しい．ここで，$\boldsymbol{\lambda}_l := M^{-1}\boldsymbol{\alpha}_l$ とすると，$\langle \boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle = \delta_{l,l'}$ となる．この性質から，$\boldsymbol{\beta} = \sum_{l=1}^r \langle \boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\beta} \rangle \boldsymbol{\alpha}_l$, $\boldsymbol{\beta} = \sum_{l=1}^r \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle \boldsymbol{\lambda}_l$ が成り立つ．特に，$\mathfrak{h}$ の 2 つの要素 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ について，$\langle \boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\beta} \rangle \geq \langle \boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\gamma} \rangle$ が全ての $l = 1, \ldots, r$ について成り立つとき，$\boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{\gamma}$ と記す．そして，2 つの集合 $\Lambda(\Delta), \Lambda_+(\Delta)$ を定義する．

$$\Lambda(\Delta) := \{\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{h}^* \,|\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \boldsymbol{\alpha}_l \in \Delta\},$$

$$\Lambda_+(\Delta) := \{\boldsymbol{\beta} \in \Lambda(\Delta) | \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle \geq 0, \forall \boldsymbol{\alpha}_l \in \Delta\}. \tag{5.2}$$

5.2 コンパクト Lie 環の構造*

一般のコンパクト Lie 群 G の既約ユニタリ表現についても，対応するコンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ の既約な歪エルミート表現から得られる．

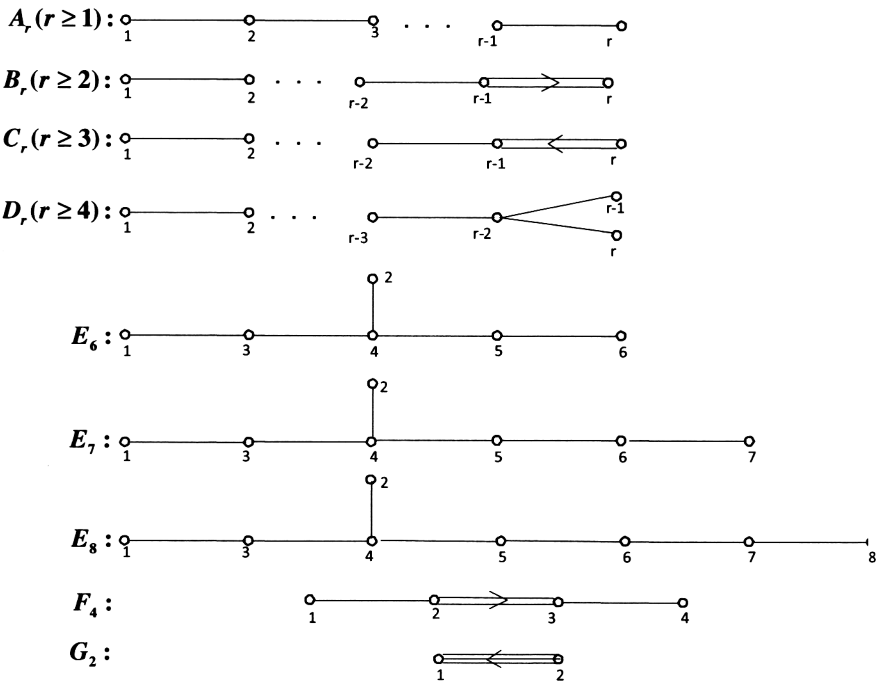


図 5.1　Dynkin diagram: l, l' を結ぶ1本線は $\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = -1$ を意味する．l, l' を結ぶ2本線は $\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle = -2$, $\langle \boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = -1$ を意味する．このとき，l の方が大きいので，それがわかるように，2本線の上に不等号 $>$ を記す．l, l' を結ぶ3本線は $\langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\alpha}_{l'} \rangle = -3$, $\langle \boldsymbol{\alpha}_{l'}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = -1$ を意味する．このとき，l の方が大きいので，それがわかるように，3本線の上に不等号 $>$ を記す．

実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の解析のためには，実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ で，その任意の2つの要素 $X, Y \in \mathfrak{h}$ が $[X, Y] = 0$ となるものに注目することが多い．このような $\mathfrak{h}$ を **Cartan 部分代数**とよぶ．特に，Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ で，$\mathfrak{h}$ を含む Cartan 部分代数が $\mathfrak{h}$ に限られるとき，$\mathfrak{h}$ は極大 Cartan 部分代数とよばれる．$\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は複数存在するが，その次元 r は $\mathfrak{h}$ のとり方に依存せず，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**階数**とよばれる．Lie 環の構造は極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ とそれに関連した構造によって決まる．特に，コンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ の場合，極大 Cartan 部分代数のとり方は複数あるものの，互いに同型である．そして，(3.47) で述べたように，コンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ の半単純部分 $\mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と可換部分 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \mathrm{ad}(X) = 0\}$ の和に分解できることを思い出そう．

半単純部分 $\mathfrak{g}^{(1)}$ の極大 Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とすると，$\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数は $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ で与えられる．したがって，コンパクト実半単純 Lie 環の構造から，コンパクト Lie 環の構造がわかる．以下，ルート系を用いて，コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の構造を調べる．

$\mathfrak{g}$ をコンパクト実半単純 Lie 環とし，$\mathfrak{h}$ をその極大 Cartan 部分代数とする．$\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の要素 $\boldsymbol{\beta}$ で，以下を満たすように $Z_{\boldsymbol{\beta}} \in \mathfrak{h}$ を選ぶ．

$$\boldsymbol{\beta}(X) = (X, Z_{\boldsymbol{\beta}})_{\mathfrak{g}}, \quad \forall X \in \mathfrak{h}. \tag{5.3}$$

そして，$Z_{\boldsymbol{\beta}}$ を用いて，$\mathfrak{h}^*$ の正定値な内積を

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) := -(Z_{\boldsymbol{\beta}}, Z_{\boldsymbol{\gamma}})_{\mathfrak{g}} = -\boldsymbol{\beta}(Z_{\boldsymbol{\gamma}}), \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathfrak{h}^* \tag{5.4}$$

で定義する．$\mathfrak{h}$ の全ての要素は可換であるので，全ての $X \in \mathfrak{h}$ が同時に補題 3.5.4 の (3.46) の形になるように，$\mathfrak{g}$ の基底をとることができる．したがって，以下を満たす $\mathfrak{h}$ についての直交補空間の基底 $\{F_t^x,\ F_t^y\}$ と $\boldsymbol{\alpha}_t \in \mathfrak{h}^*$ が存在する．

$$\mathsf{ad}(X) F_t^x = \boldsymbol{\alpha}_t(X) F_t^y, \quad \mathsf{ad}(X) F_t^y = -\boldsymbol{\alpha}_t(X) F_t^x, \quad \forall X \in \mathfrak{h}. \tag{5.5}$$

この式は，以下と同値である．

$$\mathsf{ad}(X)(F_t^x + iF_t^y) = i\boldsymbol{\alpha}_t(X)(F_t^x + iF_t^y), \quad \forall X \in \mathfrak{h}. \tag{5.6}$$

ここで，F_t^y を $-F_t^y$ に置き換えると，$\boldsymbol{\alpha}_t$ に代わり，$-\boldsymbol{\alpha}_t$ が上の条件を満たすことに注意せよ．以下では，$\boldsymbol{\alpha}_t, -\boldsymbol{\alpha}_t$ の集合を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ とする．

定理 5.2.1 $\mathfrak{g}$ がコンパクト実半単純 Lie 環のとき，異なる $t \neq t'$ について，$\boldsymbol{\alpha}_t \neq \boldsymbol{\alpha}_{t'}$ となる．

定理 5.2.2 コンパクト実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，$\Phi_{\mathfrak{g}}$ はルート系となる．逆に，任意のルート系 Φ に対して，$\Phi = \Phi_{\mathfrak{g}}$ となるコンパクト実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が存在する．

この定理 5.2.1, 5.2.2 は，それぞれ後の定理 5.3.1, 5.3.2 より得られる．

上記の定理より，$\Phi_{\mathfrak{g}}$ はルート系となるので，そのルート系の基底系 Δ を選び，$-\boldsymbol{\alpha}_t \in \Phi_{\mathfrak{g}}^+(\Delta)$ となる t について，F_t^y を $-F_t^y$ に置き換える．すると，

$\Phi_{\mathfrak{g}}^+(\Delta)$ は $\{\boldsymbol{\alpha}_t\}_t$ と一致する．したがって，$\Phi_{\mathfrak{g}}^+(\Delta) = \{\boldsymbol{\alpha}_t\}_t$ となるように，F_t^y の符号は定められているとする．以下，$\{F_t^x, F_t^y\}$ を Φ の要素 $\boldsymbol{\alpha}_t$ を用いて，$\{F_{\boldsymbol{\alpha}_t}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}_t}^y\}$ と記す．なお，

$$[F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y] = -(F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^x)_{\mathfrak{g}} Z_{\boldsymbol{\alpha}} = -(F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y)_{\mathfrak{g}} Z_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.7}$$

が成り立ち，$\{F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, Z_{\boldsymbol{\alpha}}\}$ から生成される部分空間は $\mathfrak{su}(2)$ と同型な部分代数となる．(5.7) より，$(F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^x)_{\mathfrak{g}} = (F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y)_{\mathfrak{g}}$ であるので，以下では

$$(F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^x)_{\mathfrak{g}} = (F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y)_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} = \frac{1}{(Z_{\boldsymbol{\alpha}}, Z_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}} \tag{5.8}$$

となるように $F_{\boldsymbol{\alpha}}^x$, $F_{\boldsymbol{\alpha}}^y$ を選ぶ．したがって，

$$[F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y] = \frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} Z_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.9}$$

が成り立つ．

よって，$\{F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y\}$ で生成されるベクトル空間を $\mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}]$ とすると，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+} \mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}])$ となる．したがって，$\{Z_{\boldsymbol{\alpha}_1}, \ldots, Z_{\boldsymbol{\alpha}_r}\} \cup \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+} \{F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y\}$ は $\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての基底系を与えるので，$Z_{\boldsymbol{\alpha}_1}, \ldots, Z_{\boldsymbol{\alpha}_r}, F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y$ を $\mathfrak{g}$ の**基底**とよぶことにする．この式は，コンパクト実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の構造を表す式である．

さらに，(5.6) に Jacobi 律を加えることで

$$\mathsf{ad}(X)[F_{\boldsymbol{\alpha}}^x + iF_{\boldsymbol{\alpha}}^y, F_{\boldsymbol{\alpha}'}^x + iF_{\boldsymbol{\alpha}'}^y] = i(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}')(X)[F_{\boldsymbol{\alpha}}^x + iF_{\boldsymbol{\alpha}}^y, F_{\boldsymbol{\alpha}'}^x + iF_{\boldsymbol{\alpha}'}^y], \quad \forall X \in \mathfrak{h}$$

を得る．上の式の実係数成分と虚数係数部分に整理すると，以下の定理を得る．

定理 5.2.3　$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}' \in \Phi^+$ のとき，上記の基底について，$[F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}'}^x] - [F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, F_{\boldsymbol{\alpha}'}^y]$，$[F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}'}^y] + [F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, F_{\boldsymbol{\alpha}'}^x]$ はそれぞれ $F_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'}^x$, $F_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'}^y$ の定数倍をとる．$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}' \notin \Phi^+$ のとき，上記はともに 0 になる．

一方，コンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ については，コンパクト実半単純 Lie 環 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ について，極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ と Φ^+ を与えると，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{c}(\mathfrak{g}) \oplus (\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+} \mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}])$ を得る．

したがって，コンパクト半単純 Lie 環の解析はルート系の解析に帰着できる．基本系 Δ が与えられると，Weyl 群 $\mathcal{W}$ はその部分集合 $\{W_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha} \in \Delta}$ によっ

て生成され，Δ の $\mathcal{W}$ による像は Φ に一致する．そのため，ルート系の情報は，全てその基本系の中に含まれている．基本系を解析するには，Cartan 行列を解析すれば十分であるので，コンパクト半単純 Lie 環の解析は Cartan 行列の解析に帰着できる．Cartan 行列の分類は Dynkin diagram の分類に帰着できるので，コンパクト半単純 Lie 環の分類は Dynkin diagram の分類に帰着できる．さらに，以下の定理が成り立つ．

定理 5.2.4 コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純となることと，その Dynkin diagram が連結となることは同値である．

この定理の証明については，複素化された Lie 環で扱った方がわかり易いので，次の節の末尾で述べる．

先の節で与えた，連結な Dynkin diagram のうち，A_r, B_r, C_r, D_r はそれぞれ，**古典型**とよばれ，$\mathfrak{su}(r+1)$, $\mathfrak{so}(2r+1,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(r)$, $\mathfrak{so}(2r,\mathbb{R})$ のルート系の Dynkin diagram である．また，残りのタイプの Lie 環 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 は**例外型**とよばれ，$\mathfrak{u}(r)$ の部分 Lie 環として構成できる．コンパクト単純 Lie 環のうち，古典型のルート系の構造は表 5.1 で要約できる [32, 表 4.2, 4.3]．

以下，ルート系 A_r の要素と，それに対応する $\mathfrak{su}(r+1)$ の要素との関係に

表 5.1 ルート系: $j=1,\ldots,r-1$, $j'=1,\ldots,r$, $l=j+1,\ldots,r$. A_r, B_r, C_r, D_r では，単純ルートは番号の小さい順に $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ を表す．残りのものは $\boldsymbol{\alpha}_r$ を表す．これらは，図 5.1 内の番号に対応する．

	Lie 環	単純ルート	正のルート	e_j のノルム	ルートの数	次元
A_r	$\mathfrak{su}(r+1)$	$e_{j'}-e_{j'+1}$	e_j-e_l	$\frac{1}{\sqrt{2(r+1)}}$	r^2+r	r^2+2r
B_r	$\mathfrak{so}(2r+1,\mathbb{R})$	e_j-e_{j+1}, e_r	e_j-e_l, $e_{j'}$, e_j+e_l	$\frac{1}{\sqrt{2(2r-1)}}$	$2r^2$	$2r^2+r$
C_r	$\mathfrak{sp}(r)$	e_j-e_{j+1}, $2e_{2r}$	e_j-e_l, e_j+e_l, $2e_{2j'}$	$\frac{1}{2\sqrt{r+1}}$	$2r^2$	$2r^2+r$
D_r	$\mathfrak{so}(2r,\mathbb{R})$	e_j-e_{j+1}, $e_{r-1}+e_r$	e_j-e_l, e_j+e_l	$\frac{1}{\sqrt{2(2r-1)}}$	$2r^2$	$2r^2+r$

ついて詳しく述べる．ルート系 Φ は $\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=\frac{2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}$ の構造で決まるため，Φ の全ての要素に同じスカラー c を掛けた集合 $\{c\boldsymbol{\alpha}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi}$ もルート系の条件を満たす．しかし，コンパクト単純 Lie 環に対応させるには，(5.4) で与えた内積の下で (5.5) を満たす必要がある．この内積の定義では空間 $\mathfrak{h}$ の内積として $\mathfrak{g}$ で定義した Killing form を用いている．この条件を考慮することで，コンパクト単純 Lie 環に対応するルート系が内積まで含めて一意に決まる．

(4.27) で定義した $\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\in\mathfrak{h}^*$ を用いて，ルート系 Φ は $\{\boldsymbol{\alpha}_{j,l},-\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1\le j<l\le r+1}$ で与えられる．4.3 節で与えた $F^x_{j,l}$, $F^y_{j,l}$, $F^z_{j,l}$ は

$$(F^x_{j,l},F^x_{j,l})_{\mathfrak{su}(r+1)}=(F^y_{j,l},F^y_{j,l})_{\mathfrak{su}(r+1)}=\frac{1}{4}(F^z_{j,l},F^z_{j,l})_{\mathfrak{su}(r+1)}=-(r+1)$$

を満たすので，$Z_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}=\frac{1}{2(r+1)}F^z_{j,l}$ とすると，$Z_{a_{j,l}}$ は (5.3) を満たす．$(\boldsymbol{\alpha}_{j,l},\boldsymbol{\alpha}_{j,l})=\frac{1}{r+1}$ となるので，$F^x_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}:=F^x_{j,l}$, $F^y_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}:=F^y_{j,l}$ は (5.8) を満たす．したがって，$\mathfrak{h}^*$ を $\{e_j\}_{1\le j\le r+1}$ を正規直交基底とする $r+1$ 次元の実ベクトル空間 V_r の部分空間とすると，表 5.1 のように表される．

演習問題 16　(5.7) を示せ．

演習問題 17　基底系が 2 つ以上の連結成分 $\Delta_1,\Delta_2,\ldots$ を持つとする．このとき，$\Phi^+_i:=\{\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Delta_i}m_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\}\cap\Phi^+$ とすると，任意の $\boldsymbol{\alpha}_i\in\Phi^+_i$ について，$\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_j$ $(i\neq j)$ は Φ に含まれないことを示せ．

5.3　複素半単純 Lie 環の構造*

複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の構造の解析は，コンパクト半単純 Lie 環の構造の解析より容易である．$\mathfrak{g}$ の複素部分 Lie 代数の場合，Cartan 部分代数はその要素が互いに可換となる部分代数で，その要素が随伴表現の下で対角化可能なものとして定義される．そして，同じように，極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ および，複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**階数**を定義する．$\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の要素 $\boldsymbol{\beta}$ と任意の $X\in\mathfrak{h}$ に対して，$\boldsymbol{\beta}(X)=(X,E_{\boldsymbol{\beta}})$ が成り立つように $E_{\boldsymbol{\beta}}\in\mathfrak{h}$ を定義し，$\mathfrak{h}^*$ の要素 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ に対して，内積 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}):=(E_{\boldsymbol{\beta}},E_{\boldsymbol{\gamma}})=\boldsymbol{\beta}(E_{\boldsymbol{\gamma}})$ を与える．$\{\mathsf{ad}(X)\}_{X\in\mathfrak{h}}$ は同時対角化できるので，固有ベクトルからなる $\mathfrak{h}$ の直交補空間の基底 $\{K_t\}$ を選ぶと各基底に対して，$\mathsf{ad}(X)K_t=\boldsymbol{\alpha}_t(X)K_t$ を満たす $\mathfrak{h}$

の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の要素 $\boldsymbol{\alpha}_t$ が選べる．このような $\boldsymbol{\alpha}_t$ をルートとよび，その集合を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ と記す．このとき，以下の定理が成り立つ．

定理 5.3.1 [34, p.91 定理 4(i)][17, 8.4 節 Proposition (a)] $\mathfrak{g}$ が複素半単純 Lie 環のとき，異なる $t \neq t'$ について，$\boldsymbol{\alpha}_t \neq \boldsymbol{\alpha}_{t'}$ となる．

集合 $\Phi_{\mathfrak{g}}$ について以下の定理が成り立つ．

定理 5.3.2 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，$\Phi_{\mathfrak{g}}$ はルート系となる．逆に，任意のルート系 Φ に対して，$\Phi = \Phi_{\mathfrak{g}}$ となる複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ が存在する．(前半部については [34, p.90 定理 3, p.91 定理 4][17, 8.5 節 Theorem] に証明は与えられている．後半部の証明は [34, 17] において，全ての単純ルート系に対応する単純 Lie 環が構成されていることから確認できる．)

定理 5.3.1 より，$\Phi_{\mathfrak{g}}$ の要素 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して，基底が一意に決まるので，$F_{\boldsymbol{\alpha}}$ を満たすものとして定義する．

$$\mathsf{ad}(X)K_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}(X)K_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \forall X \in \mathfrak{h} \tag{5.10}$$

$$(K_{\boldsymbol{\alpha}}, K_{-\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = \frac{2}{(E_{\boldsymbol{\alpha}}, E_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}}. \tag{5.11}$$

このとき，

$$[K_{\boldsymbol{\alpha}}, K_{-\boldsymbol{\alpha}}] = \frac{2}{(E_{\boldsymbol{\alpha}}, E_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}} E_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.12}$$

が成り立つ．

すると，$\mathfrak{n}_+ := < \{K_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+} >$, $\mathfrak{n}_- := < \{K_{-\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+} >$ はともに，冪零部分 Lie 環となり，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の **Gauss 分解** $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ を得る．この事実は対応する Lie 群 G についても成り立つことが知られている．複素ベクトル $\{\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$, $\{\zeta'_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$ を用いると，冪零部分 Lie 環に対応する部分 Lie 群 $N_+ := \{\exp(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+} \zeta'_{\boldsymbol{\alpha}} K_{\boldsymbol{\alpha}})\}_{\zeta'}$, $N_- := \{\exp(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^-} \zeta_{\boldsymbol{\alpha}} K_{\boldsymbol{\alpha}})\}_{\zeta}$ を定義できる．なお，各 $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+$ について，$\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}$ は複素数であり，$\{\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$ は $|\Phi^+|$ 個の成分を持つ複素ベクトルである．

右側から群 N_+ の作用を考え，左側から群 N_- の作用を考えると，左右の作用について割った商空間の接空間の代表元の集合を $\mathfrak{h}$ で与えることができ

る．したがって，商空間の代表元の集合を $\{\exp(\sum_{j=1}^{r}\eta_{\boldsymbol{\alpha}}E_{\boldsymbol{\alpha}_j})\}_\eta$ で与えることができる．したがって，(4.1) の一般化として，測度 0 の点を除いて任意の要素 $g\in G$ に対して，適切に複素ベクトル $\{\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$, $\{\zeta'_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{r}$ を選ぶと，

$$g=\exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}K_{-\boldsymbol{\alpha}}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{r}\eta_{\boldsymbol{\alpha}}E_{\boldsymbol{\alpha}_j}\right)\exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}\zeta'_{\boldsymbol{\alpha}}K_{\boldsymbol{\alpha}}\right) \tag{5.13}$$

が成り立つ [31, p.474]．これは Lie 群 G の **Gauss 分解**とよばれる．

コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は複素半単純 Lie 環となる．$\boldsymbol{\alpha}\in\Phi_{\mathfrak{g}}^{+}$ に対して，$\mathfrak{g}$ の要素 $F_{\boldsymbol{\alpha}}^{x},F_{\boldsymbol{\alpha}}^{y},Z_{\boldsymbol{\alpha}}$ から以下のように，$F_{\boldsymbol{\alpha}},E_{\boldsymbol{\alpha}}\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が与えられる．

$$E_{\boldsymbol{\alpha}}=-iZ_{\boldsymbol{\alpha}},\quad K_{\boldsymbol{\alpha}}=-iF_{\boldsymbol{\alpha}}^{x}-F_{\boldsymbol{\alpha}}^{y},\quad K_{-\boldsymbol{\alpha}}=-iF_{\boldsymbol{\alpha}}^{x}+F_{\boldsymbol{\alpha}}^{y}. \tag{5.14}$$

関係式 (5.5), (5.7), (5.9) より，上で与えた $K_{\boldsymbol{\alpha}},E_{\boldsymbol{\alpha}}$ が (5.10), (5.11), (5.12) を満たすことが確認できる．

ここで，$\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}}$ を $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ で生成される 1 次元部分ベクトル空間とする．($\mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}]$ とは定義が異なることに注意せよ．) すると，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\oplus\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi}\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}}$ となる．そして，定理 5.2.3 より，$\boldsymbol{\alpha}'\neq-\boldsymbol{\alpha}$ のとき，

$$[\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}},\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}'}]=\begin{cases}\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'} & \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'\in\Phi\\ \{0\} & \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'\notin\Phi\end{cases} \tag{5.15}$$

を得る．一方，$\boldsymbol{\alpha}'=-\boldsymbol{\alpha}$ のときは，

$$[\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}},\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}'}]\subset\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \tag{5.16}$$

となる．

逆に，複素半単純 Lie 環の基底 $K_{\boldsymbol{\alpha}},E_{\boldsymbol{\alpha}}$ から，

$$Z_{\boldsymbol{\alpha}}:=iE_{\boldsymbol{\alpha}},\quad F_{\boldsymbol{\alpha}}^{x}:=\frac{i}{2}(K_{\boldsymbol{\alpha}}+K_{-\boldsymbol{\alpha}}),\quad F_{\boldsymbol{\alpha}}^{y}:=\frac{1}{2}(-K_{\boldsymbol{\alpha}}+K_{-\boldsymbol{\alpha}})$$

を与えると，$F_{\boldsymbol{\alpha}}^{x},F_{\boldsymbol{\alpha}}^{y},Z_{\boldsymbol{\alpha}}$ から生成される実ベクトル空間はコンパクト半単純 Lie 環になる．すなわち，複素半単純 Lie 環とコンパクト半単純 Lie 環との間

には一対一の関係がある．以下では，この関係を利用して，コンパクト半単純 Lie 環の性質について調べる．

以下，定理 5.2.4 の証明について述べる．まず，最初にコンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ について，その複素化された Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が単純であるとき，コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ も単純となることに注意しよう．

極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の半単純複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の随伴表現を考えたとき，$K_{\boldsymbol{\alpha}}$ は固有ベクトルとなる．また，$K_{\boldsymbol{\alpha}}$ と $K_{-\boldsymbol{\alpha}}$ の半単純複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ への作用を考えたとき，E_α と K_α は（そのスカラー倍を同一視すると）互いに移りあう．

したがって，半単純複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の随伴表現に関する不変部分空間は，少なくともある $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+$ について，$\{E_\alpha, K_\alpha, K_{-\alpha}\}$ で生成される部分空間を含む．さらに，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in \Phi^+$ が $\boldsymbol{\alpha}'' = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}' \in \Phi^+$ を満たすとき，随伴表現の下で，K_α と $K_{\alpha''}$ は移りあう．同様に，$K_{\alpha'}$ と $K_{\alpha''}$ も移りあうので，これらの 3 つの要素は移りあう．

そして，基底系の 2 つの要素 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in \Delta$ について，$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \rangle \neq 0$ のとき，この値は非負の整数であるので，$\boldsymbol{\alpha} - \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \rangle \boldsymbol{\alpha}' \in \Phi^+$ となり，K_α と $K_{\alpha'}$ は移りあう．したがって，連結な Dynkin diagram に対応する複素 Lie 環はその随伴表現について非自明な不変部分空間を持たない．すなわち，対応する複素 Lie 環は単純である．したがって，対応するコンパクト Lie 環は単純である．

一方，繋がっていない基底系の 2 つ以上の成分からなるとしよう．このとき，演習問題 17 より，任意の $\boldsymbol{\alpha}_i \in \Phi_i^+$ について，$\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j$ は Φ に含まれない．したがって，1 つの基底系の連結成分から生成される部分複素 Lie 環 $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ に，$K_{\pm\boldsymbol{\alpha}'}$ を作用させたとき，これらは 0 に移る．同様に，$E_{\boldsymbol{\alpha}}$ を作用させたとき，これらは 0 に移る．したがって，部分複素 Lie 環 $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ は随伴表現に関して複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の不変部分空間となる．よって，対応する部分コンパクト Lie 環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ も随伴表現に関してコンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}$ の不変部分空間となる．

これらの事実より，半単純複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が単純となることと，半単純コンパクト Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が単純となることと，その Dynkin diagram が連結となることは同値である．したがって，定理 5.2.4 を得る．

5.4　コンパクト半単純 Lie 環の歪エルミート表現*

次に，一般のコンパクト Lie 群のユニタリ表現を調べるために，コンパクト単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の歪エルミート表現を調べる．$\mathfrak{g}$ の $\mathcal{H}$ への既約歪エルミート表現 f に対して，$\mathfrak{su}(2)$ や $\mathfrak{su}(d)$ の表現と同じように，

$$\mathsf{E}_j := -i\mathsf{f}(Z_{\boldsymbol{\alpha}_j}), \quad \boldsymbol{\alpha}_j \in \Delta_{\mathfrak{g}}, \quad \mathsf{K}_{\pm\boldsymbol{\alpha}} := -i\mathsf{f}(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}) \mp \mathsf{f}(F^y_{\boldsymbol{\alpha}}), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{g}}$$

を定義する．複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を考えると，$\mathsf{E}_j = \mathsf{f}(E_{\boldsymbol{\alpha}_j}),\quad \boldsymbol{\alpha}_j \in \Delta_{\mathfrak{g}}$, $\mathsf{K}_{\pm\boldsymbol{\alpha}} = \mathsf{f}(F_{\pm\boldsymbol{\alpha}}),\quad \boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{g}}$ と書ける．すると，(5.10), (5.12) より，

$$[\mathsf{E}_{j'}, \mathsf{E}_j] = 0 \tag{5.17}$$

$$[\mathsf{E}_{j'}, \mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}] = \boldsymbol{\alpha}(Z_j)\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.18}$$

$$[\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}_j}, \mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}_j}] = \frac{2}{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j)}\mathsf{E}_j$$

が成り立つ．そして，表現の歪エルミート性から $(\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}})^\dagger = \mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}}$ および，E_j のエルミート性が得られる．よって，(5.17) より，$\mathcal{H}$ は $\mathfrak{h}$ の要素について同時固有空間に分解できる．固有値は $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の要素 m を用いて記述できる．この固有空間の組に対応する同時固有空間は $\mathcal{U}^w_{\boldsymbol{m}} := \{v \in \mathcal{H} \mid \mathsf{f}(X)v = i\boldsymbol{m}(X)v, \quad \forall X \in \mathfrak{h}\}$ で与えられる．上の条件は $\mathsf{E}_j v = \boldsymbol{m}(Z_{\boldsymbol{\alpha}_j})v$ と同値である．$\mathcal{H}$ を表現空間とする表現 f について，$\mathcal{U}^w_{\boldsymbol{m}} \neq \{0\}$ となる $\boldsymbol{m} \in \mathfrak{h}^*$ の要素を**ウェイト**とよぶ．このとき，(5.18) より，$v \in \mathcal{U}^w_{\boldsymbol{m}}$ に対して，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}v$ は $\mathcal{U}^w_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\alpha}}$ の要素となる．群の要素 $e^X \in G$ $(X \in \mathfrak{h})$ の作用については，

$$\mathsf{f}(e^X)v = e^{i\boldsymbol{m}(X)}v, \quad \forall v \in \mathcal{U}^w_{\boldsymbol{m}} \tag{5.19}$$

が成り立つ．

$\mathcal{H}$ が既約な歪エルミート表現空間であるとき，ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ で以下を満たすものが一意にとれる．

(1)　$\mathcal{U}^w_{\boldsymbol{\lambda}}$ は1次元空間．

(2)　$\mathcal{U}^w_{\boldsymbol{\lambda}}$ の要素 $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ は $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+$ に対して，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle = 0$ となる．

このようなウェイトのことを**最大ウェイト**とよぶ．特に，条件 **(2)** を満たすベクトル $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ は**最大ウェイトベクトル**とよばれる．最大ウェイトが $\boldsymbol{\lambda}$ とな

る表現空間は $\{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\mathsf{K}_{-\alpha})^{l_\alpha}v_\lambda\}$ で生成され，最大ウェイト λ から一意に定まる．そのため，最大ウェイト λ をこの既約歪エルミート表現を表すラベル（$\hat{\mathfrak{g}}$ の要素）として扱う．その表現空間を $\mathcal{U}_\lambda$ と記し，$\mathcal{U}_\lambda$ への表現を f_λ と記す．

λ を最大ウェイトとする歪エルミート表現が存在するための必要十分条件は λ の Dynkin 指数の成分が全て非負の整数 $\langle\lambda,\alpha_j\rangle$ であること，すなわち，$\lambda\in\Lambda_+$ である．基本系 Δ は $\{\alpha_j\}$ で与えられるから，この必要十分条件は (5.2) で与えた $\Lambda_+(\Delta)$ の定義に注意すると，$\lambda\in\Lambda_+(\Delta)$ と同値である．すなわち，$\Lambda_+(\Delta)$ は既約歪エルミート表現の集合 $\hat{\mathfrak{g}}$ と同一視することができる．特に，$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ も随伴表現の下で既約な表現空間となり，その最大ウェイトは命題 5.1.5 で与えた最大ルート $\lambda(\Phi)$ に一致する．

そして，集合 $\Lambda(\lambda):=\{\beta\in\mathfrak{h}^*\,|\,\mathcal{U}^w_\beta\neq\{0\}\}$ を特徴付けるために，写像 W_α を一般化して，以下の写像を定義する．

$$W_{\alpha,k}(\beta):=\begin{cases}\beta-k\alpha & k \text{ が } 0 \text{ と } \langle\beta,\alpha\rangle \text{ の間の整数の場合}\\ \beta & \text{上記以外.}\end{cases}$$

$\langle\beta,\alpha\rangle=\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=-2\beta([F^x_\alpha,F^y_\alpha])$ であるから，$\{F^x_\alpha,F^y_\alpha,[F^x_\alpha,F^y_\alpha]\}$ で生成される $\mathfrak{su}(2)$ と同型な部分 Lie 環の作用を考えることで，集合 $\Lambda(\lambda)$ は $W_{\alpha,k}$ の作用に関して閉じていることがわかる．したがって，集合 $\Lambda(\lambda)$ は $\{W_{\beta_1,k_1}\circ W_{\beta_2,k_2}\circ\cdots\circ W_{\beta_n,k_n}(\lambda)\}_{\beta_j\in\Phi,k_j\in\mathbb{Z}}$ と一致する．さらに，$\mathcal{U}_\lambda$ の次元については以下の **Weyl の次元公式**が知られている [34, p.172 定理 3][17, 24.3 節 Corollary].

$$\dim\mathcal{U}_\lambda=\frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\lambda+\delta,\alpha)}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\delta,\alpha)}=\frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\lambda+\delta,\alpha\rangle}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\delta,\alpha\rangle}.$$

ここで，$\delta:=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$ とおいた．δ は 5.1 節で定義した λ_j を用いて，$\delta=\sum_{j=1}^r\lambda_j$ と表すこともできる [34, p.130 補題 3][17, 13.3 節 Lemma A].

$\mathfrak{g}$ がコンパクト実半単純 Lie 環の場合，そのルート系は連結な成分 $\Phi_1,\ldots,\Phi_l$ に分解できる．個々の連結成分 Φ_j はルート系となり，その基本系を Δ_j とすると，$\mathfrak{g}$ のウェイトの集合は $\Lambda_+(\Delta_1)\times\cdots\times\Lambda_+(\Delta_l)$ で与えられる．さらに，補題 3.4.2 より，その既約な歪エルミート表現の集合 $\hat{\mathfrak{g}}$ も $\Lambda_+(\Delta_1)\times\cdots\times\Lambda_+(\Delta_l)$

で与えられる．そして，$\mathfrak{g}$ が一般のコンパクト Lie 環の場合は，$\mathfrak{g}$ はコンパクト実半単純 Lie 環 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ と中心 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ に分解できる．中心 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ の既約な表現空間の次元は1次元なので，既約な表現空間はコンパクト実半単純 Lie 環 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の既約な表現空間と一致する．$\mathfrak{g}$ の既約な歪エルミート表現は $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の既約な表現空間 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ への作用と，中心 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ の空間 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ へのスカラーとなる作用を指定することで決まる．

5.5　部分代数と部分ルート系*

Lie 群 G の作用による対称性を持つ等質空間は群 G の部分群である固定化群 H_1 を用いて，G/H_1 と記述できる．そのため，等質空間の構造を調べるためには，群 G とその部分群 H_1 の関係を調べる必要がある．この議論は，コヒーレント状態の概念を一般化するために重要である．以下では，H_1 が部分 Lie 群である場合に注目する．しかし，一般に，Lie 群の構造を直接調べるのは困難である場合があるので，対応する Lie 環の構造を調べることにする．したがって，本節では，コンパクト実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ を扱う．

なお，ここではコンパクト実半単純 Lie 環を扱うが，ここでの議論は，非コンパクト Lie 環を扱うために必要となる議論の準備にもなっている．そのため，本節の議論は非コンパクト Lie 環を扱うために必須である．

$\mathfrak{h}_1$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_2$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数となるとき，$\mathfrak{h}_2$ は $\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の部分空間となる．そのため，$\mathfrak{h}^*$ に定義した内積の下で，$\mathfrak{h}_2^*$ は $\mathfrak{h}^*$ の部分空間と見なせる．このように，$\mathfrak{h}_1$ のルート系 $\Phi' := \Phi(\mathfrak{h}_1)$ が $\Phi := \Phi_{\mathfrak{g}}$ の部分集合となるとき，$\mathfrak{h}_1$ は $\mathfrak{g}$ の**正則部分代数**という．部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ が $\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含む場合，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}_1$ の極大 Cartan 部分代数となる．したがって，共通の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ について，それらのルート系 $\Phi := \Phi_{\mathfrak{g}}$, $\Phi' := \Phi(\mathfrak{h}_1)$ が定義できる．このとき，Φ' は Φ の部分集合となる．このような場合，$\mathfrak{h}_1$ は $\mathfrak{g}$ の**極大正則部分代数**という．以下，$\mathfrak{h}_1$ が $\mathfrak{g}$ の極大正則部分代数となる場合に限って議論する．

このとき，$\mathfrak{h}_1$ が部分代数である条件

$$[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_1 \tag{5.20}$$

より，

$$(\Phi' + \Phi') \cap \Phi \subset \Phi' \tag{5.21}$$

を得る．一般に，ベクトル空間 V の部分集合 S, S' に対して，$S + S' := \{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}' \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in S, \boldsymbol{\alpha}' \in S'\}$ と定義する．

このとき，Φ' を Φ の**部分ルート系**という．そして，Φ^+ をルート系 Φ の正のルートの集合とし，部分ルート系 Φ' の正のルートの集合を $\Phi'^+(\Delta) := \Phi^+(\Delta) \cap \Phi'$ で与える．すると，コンパクト実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+} \mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}])$ に対して，$\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi'^+} \mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}])$ は条件 (5.21) より，条件 (5.20) を満たすため，$\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含む部分 Lie 環となる．したがって，極大 Cartan 部分代数を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ の解析は部分ルート系の解析に帰着できる．

ここで，Killing form についての $\mathfrak{h}_1$ の直交補空間を $\mathfrak{p}$ としよう．すると，$X, Y \in \mathfrak{h}_1$, $Z \in \mathfrak{p}$ に対して，$[X, Y] \in \mathfrak{h}_1$ であるので，$(X, [Y, Z])_{\mathfrak{g}} = ([X, Y], Z)_{\mathfrak{g}} = 0$ となり，$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ を得る．$\mathfrak{p}$ の要素のルートの集合は $\Phi \setminus \Phi'$ と一致することから，

$$(\Phi' + (\Phi \setminus \Phi')) \cap \Phi \subset (\Phi \setminus \Phi') \tag{5.22}$$

を得る．すなわち，(5.22) は (5.21) より直接導かれる性質である．

部分ルート系について以下の同値関係が成り立つ．

定理 5.5.1　実ベクトル空間 V 上の Δ を基本系とするルート系 Φ の部分ルート系 Φ' について以下は同値である．

(1)　$\Phi'^+(\Delta)$ は Φ' の正のルートの集合となり，その基本系 Δ' はルート系 Φ の基本系 $\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ に含まれ，$\Delta' = \Delta \cap \Phi'^+(\Delta)$ となる．さらに，適切に $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+(\Delta)$ を選ぶと，$\Phi' = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0\}$ が成り立つ．

(2)　以下を満たす $X \in \mathfrak{h}$ が存在する．

$$\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi' = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, \boldsymbol{\alpha}(X) > 0\} \tag{5.23}$$

$$\Phi' = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, \boldsymbol{\alpha}(X) = 0\}.$$

(3)　$\Phi^+(\Delta)$ は $((\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') + \Phi') \cap \Phi \subset (\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi')$ を満たす．

(4)　集合 $\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi'$ は Φ' に関する Weyl 群 $\mathcal{W}(\Phi')$ ($\{W_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi'}$ で生成される群) の作用に関して不変である．

証明.　**(2)⇒(3)** は自明.

(3)⇒(4): $\boldsymbol{\beta} \in \Phi^+(\Delta) \setminus \Phi'$ と $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi'$ に対して，$\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ は整数となる．したがって，**(3)** より，$W_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta} - \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \boldsymbol{\alpha}$ は $\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi'$ の要素となる.

(4)⇒(2) $cone(\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi')^* := \{X \in \mathfrak{h} \,|\, \boldsymbol{\alpha}(X) > 0,\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+(\Delta) \setminus \Phi'\}$ は凸錘となる．特に，$cone(\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') \cap cone(\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') = \emptyset$ であるので，$cone(\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi')^*$ は空集合とならない．次に，$X \in \mathfrak{h}$ に対する Weyl 群 $\mathcal{W}(\Phi')$ の要素 W の作用を $\boldsymbol{\alpha}(W(X)) := W(\boldsymbol{\alpha})(X)$ で定義する．このとき，$W_{\boldsymbol{\alpha}}(X) := X - \boldsymbol{\alpha}(X) Z_{\boldsymbol{\alpha}}$ となる．すると，$\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi'$ は Weyl 群 $\mathcal{W}(\Phi')$ の作用に関して不変であるので，$cone(\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi')^*$ も Weyl 群 $\mathcal{W}(\Phi')$ の作用に関して不変である．したがって，$cone(\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi')^*$ は Weyl 群 $\mathcal{W}(\Phi')$ の作用に関する 0 とならない不動点 X を含む．よって，$\boldsymbol{\alpha} \in \Phi'$ に対して，$\boldsymbol{\alpha}(X) = 0$ となり，**(2)** を得る.

(2)⇒(1): $\boldsymbol{\alpha} \in \Delta'$ に対して，$\boldsymbol{\alpha} = m_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + \cdots + m_{i_m}\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ を満たす Δ の要素 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ と正の整数 $m_{i_1}, \ldots, m_{i_m}$ を選ぶ．条件 **(2)** より，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ は全て Φ' の要素となる．基本系の定義より，$l = 1$ となり，$\boldsymbol{\alpha} \in \Delta$ を得る．すなわち，$\Delta' = \Delta \cap \Phi'^+(\Delta)$ を得る．そして，$\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}_j\}$ について，これらがベクトル空間としての基底を与えることから，$\langle \boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_i \rangle = \delta_{i,j}$ を満たす $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathfrak{h}^*$ がとれる．ここで，$\Delta \setminus \Delta' = \{\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{j_l}\}$ とし，$\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda}_{j_1} + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_{j_l}$ とすると，$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+(\Delta)$ となり，$\Phi' = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0\}$ が成り立つ.

(1)⇒(2) は自明.　□

そして，Δ を基本系とするルート系 Φ の部分ルート系 Φ' が上記の条件を満たすとき，$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ を**放物型システム**という [26, Definition VII.2.6.]. $(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ が放物型システムであるとき，条件 **(2)** より，

$$((\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') + (\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi')) \cap \Phi \subset (\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') \tag{5.24}$$

を得る.

さらに，$\mathfrak{h}_1$ が極大 Cartan 部分代数を含むとは限らない $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環について，以下の定理が成り立つ.

定理 5.5.2　コンパクト実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ について以下は同値である.

(1) $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)) = \mathfrak{h}_1$.

(2) 部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ が $\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含む．そして，Φ の基本系 Δ を適切に選ぶと，$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ は放物型システムとなる．

証明. **(1)⇒(2)**: 半単純 Lie 環 $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}'$ と $\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ の要素は互いに可換であるので，$\mathfrak{h}' + \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ は $\mathfrak{h}_1$ の極大 Cartan 部分代数となる．しかも，5.2 節の最初の議論より $\mathfrak{h}_1$ の極大 Cartan 部分代数となる．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}' + \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数とする．$\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1) \subset \mathfrak{h}$ であるので，$\mathfrak{h} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)) = \mathfrak{h}_1$ となり，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}_1$ の Cartan 部分代数となる．$\mathfrak{h}' + \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ の極大性より，$\mathfrak{h}' + \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ と $\mathfrak{h}$ は一致する．すなわち，$\mathfrak{h}_1$ は $\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含む．

さらに，$\mathfrak{h}$ についての基底となる $\mathfrak{h}_1$ の要素 $F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}$ は $\mathfrak{g}$ の要素でもあるので，$\mathfrak{h}_1$ のルートは $\mathfrak{g}$ のルートになる．すなわち，$\Phi_{\mathfrak{h}_1} \subset \Phi_{\mathfrak{g}}$ が成り立つ．そして，$X \in \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ は

$$\boldsymbol{\alpha}(X) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Phi(\mathfrak{h}_1) \tag{5.25}$$

となる．一方，$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)) = \mathfrak{h}_1$ より，$\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{g}} \setminus \Phi_{\mathfrak{h}_1}$ に対して，適当な $X_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ を選ぶと，$\boldsymbol{\alpha}(X_{\boldsymbol{\alpha}}) \neq 0$ となる．したがって，適当な $X \in \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ を選ぶと，任意の $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{g}} \setminus \Phi_{\mathfrak{h}_1}$ に対して，$\boldsymbol{\alpha}(X) \neq 0$ が成り立つ．したがって，命題 5.1.4 より，$\Phi_{\mathfrak{g}}$ の基本系 Δ を適切に選ぶと，$\Phi^+_{\mathfrak{g}}$ は

$$\boldsymbol{\alpha}(X) > 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+_{\mathfrak{g}} \setminus \Phi_{\mathfrak{h}_1} \tag{5.26}$$

を満たす．(5.25), (5.26) より $\Phi^+_{\mathfrak{h}_1} := \Phi_{\mathfrak{h}_1} \cap \Phi^+_{\mathfrak{g}}$ の要素は $\Delta(\mathfrak{h}_1) := \Phi_{\mathfrak{h}_1} \cap \Delta$ の要素の和で与えられ，$\Delta(\mathfrak{h}_1)$ は $\Phi_{\mathfrak{h}_1}$ の基本系となる．そして，$\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ がベクトル空間としての基底を与えることから，$\langle \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\alpha}_j \rangle = \delta_{i,j}$ を満たすように，$\{\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_r\}$ を選ぶことができる．したがって，$\Delta \setminus \Delta(\mathfrak{h}_1)$ の要素を $\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_l}\}$ とすると，$\Phi_{\mathfrak{h}_1} = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{g}} \mid \langle \boldsymbol{\lambda}_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_{i_l}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0\}$ を得る．よって，定理 5.5.1 の条件 **(1)** が成り立つことから，**(2)** を得る．

(2)⇒(1): 定義より，$\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1))$ であるので，$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)) = \{0\}$ であることを示せば十分である．$\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ は極大 Cartan 部分代数に含まれることから，$\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1) = \{X \in \mathfrak{h} \mid \boldsymbol{\alpha}(X) = 0, \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Phi'\}$ となる．定理 5.5.1 の条件 **(2)** を満たす $X \in \mathfrak{h}$ を選ぶと，$X \in \mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1)$ となる．また，(5.23) より，$Y \in \mathfrak{p}$ は $[X, Y] \neq 0$

となる．よって，$Y \notin \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}(\mathfrak{h}_1))$ となり題意を得る．□

次に，$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{p}$ の複素化 $\mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ を考えよう．このとき，上記の条件から，

$$[\mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}] \subsetneq \mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}, \quad [\mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \tag{5.27}$$

を得る．そして，$\{K_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+(\Delta)\setminus\Phi'}$，$\{K_{-\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+(\Delta)\setminus\Phi'}$，$\{K_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi'^+(\Delta)}$，$\{K_{-\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi'^+(\Delta)}$ で生成される複素 Lie 環 $\mathfrak{p}_{+,\mathbb{C}} := \oplus_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+(\Delta)\setminus\Phi'}\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}}$，$\mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}} := \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+(\Delta)\setminus\Phi'}\mathfrak{g}_{-\boldsymbol{\alpha}}$，$\mathfrak{h}_{1,+,\mathbb{C}} := \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi'^+(\Delta)}\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\alpha}}$，$\mathfrak{h}_{1,-,\mathbb{C}} := \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi'^+(\Delta)}\mathfrak{g}_{-\boldsymbol{\alpha}}$ に注目しよう．(5.15), (5.16) および $\Phi'^+(\Delta)$ の性質より，

$$[\mathfrak{h}_{1,+,\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{1,+,\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{h}_{1,+,\mathbb{C}}, \quad [\mathfrak{h}_{1,-,\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{1,-,\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{h}_{1,-,\mathbb{C}} \tag{5.28}$$

が成り立つ．同様に，(5.15), (5.16) および (5.24) より，

$$[\mathfrak{p}_{+,\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{+,\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{p}_{+,\mathbb{C}}, \quad [\mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}} \tag{5.29}$$

が成り立つ．これらの事実は，$\mathfrak{p}_{+,\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{1,+,\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{1,-,\mathbb{C}}$ がそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分複素 Lie 環となることを示している．

ここで，$\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ の $\mathfrak{g}$ への随伴表現を考えよう．すると，$\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}$ が不変部分空間となる．したがって $\mathfrak{h}_1$ の $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ への実表現が定義できる．なお，$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ は $\mathfrak{p}$ と同型であるので，この表現は $\mathfrak{h}_1$ の $\mathfrak{p}$ への実表現と考えることができる．

一方，ルート系 Φ の部分ルート系 Φ' について，

$$((\Phi \setminus \Phi') + (\Phi \setminus \Phi')) \cap \Phi \subset \Phi' \tag{5.30}$$

が成り立つことと，Φ' に対応する極大 Cartan 部分代数を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ とその直交補空間 $\mathfrak{p}$ について $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}_1$ が成立することは同値である．以下ではこの条件を満たすとき，Φ の部分ルート系 Φ' は**既約**とよぶことにする．この条件は複素化についての条件 $[\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}$ と同値である．

さらに，Φ の既約部分ルート系 Φ' に対して，$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ が放物型システムとなるとき，$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ を**既約放物型システム**とよぶことにする．

定理 5.5.3　実ベクトル空間 V 上の Δ を基本系とするルート系 Φ の部分ルート系 Φ' について以下は同値である．

(1)　$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ は既約放物型システムである．
(2)

$$((\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') + (\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi')) \cap \Phi = \emptyset \tag{5.31}$$

$$((\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') + \Phi') \cap \Phi \subset (\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi') \tag{5.32}$$

証明.　**(1)⇒(2)** (5.24) と (5.30) より，(5.31) が成り立つ．また，(5.32) は放物型システムの条件 **(3)** に他ならない．

(2)⇒(1) (5.32) より，$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ は放物型システムである．(5.31) より，(5.30) が成り立ち，Φ' は既約となる．□

対応する Lie 環 $\mathfrak{g}$ が単純である場合，ルート系 Φ は連結となる．Φ が連結であるとき既約放物型システム $(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ を**連結既約放物型システム**とよぶことにする．このとき，**(2)** より，$\Delta \setminus \Phi'$ の要素は少なくとも 1 つは存在する．もし，$\Delta \setminus \Phi'$ に 2 つ要素 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ が存在すると，基底系が連結であることから，これらを繋ぐ $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_l \in \Delta'$ を選ぶことができる．（ここで，$\langle \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j \rangle$ は，隣接する i, j 以外は 0 とする．）さらに，$\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_l, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle = -1$ となるとする．もし，これが成り立たない場合は図 5.1 の分類より，$\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ を入れ替えれば成り立つ．そして，条件 (5.22) より，$\boldsymbol{\beta}_1' := W_{\boldsymbol{\alpha}_l} \circ \cdots \circ W_{\boldsymbol{\alpha}_1}(\boldsymbol{\beta}_1)$ は $\Phi^+ \setminus \Phi'$ に含まれる．$W_{\boldsymbol{\beta}_2}(\boldsymbol{\beta}_1') = \boldsymbol{\beta}_1' + \boldsymbol{\beta}_2$ となり，(5.31) に矛盾する．したがって，$\Delta \setminus \Phi'$ は唯一の要素 $\boldsymbol{\beta}$ を持つ．そして，$\Phi^+(\Delta) \setminus \Phi'$ は $(\boldsymbol{\beta} + span_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\Delta \setminus \{\boldsymbol{\beta}\})) \cap \Phi$ で与えられる．この事実を用いると，連結既約放物型システムは Δ を与える Dynkin diagram と単純ルート $\boldsymbol{\beta}$ を記述することで分類できる [26, Theorem A.V.1(c)][18, Appendix C]．このような，Dynkin diagram と単純ルート $\boldsymbol{\beta}$ の組は以下に分類できる．図 5.2 では，単純ルート $\boldsymbol{\beta}$ に対応する点を黒く塗りつぶした．このような図を**エルミート型 Dynkin diagram** とよぶことにする．

$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ が連結既約放物型システムのとき，Φ に対応する Lie 環 $\mathfrak{g}$ は単純であるため，最大のルート $\boldsymbol{\lambda}(\Phi) \in \Phi$ が存在するが，$\boldsymbol{\lambda}(\Phi)$ は Φ' に含まれない．この事実は後に有効となる．さらに，上記の議論を用いることにより以下の定理を得る．

定理 5.5.4　Φ の既約部分ルート系 Φ' が既約であり，$\mathfrak{g}$ が単純であるとき，$[\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{p}$ であり，$|\Delta \setminus \Delta'| = 1$ となり，$\mathfrak{h}_1$ の $\mathfrak{p}$ への実表現は既約である．

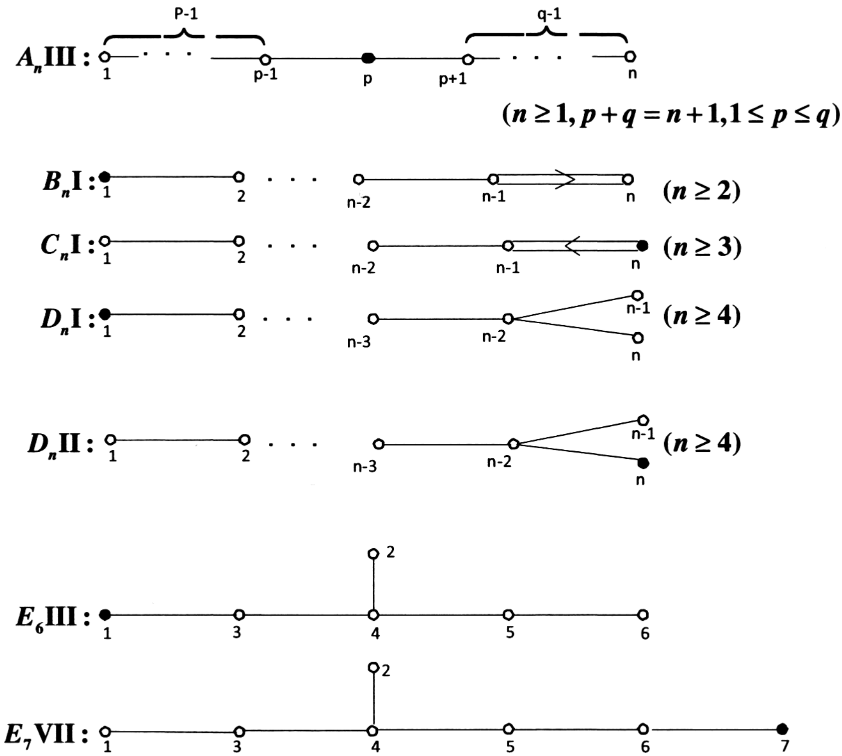


図 5.2　エルミート型 Dynkin diagram

証明.　$\mathfrak{p}+\mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{p}+\mathfrak{h}_1, \mathfrak{p}+\mathfrak{h}_1] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_1] + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]$ であり，$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_1$ であるから，$[\mathfrak{p}, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{p}$ を得る．

さらに，上記の議論より，$|\Delta \setminus \Delta'| = 1$ となり，$\Phi^+ \setminus \Phi'$ の要素は全て，$\boldsymbol{\beta} + m_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + m_l\boldsymbol{\alpha}_l$ の形で表される．したがって，$K_{\boldsymbol{\beta}}$ の $\mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}$ による軌道には，全ての $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+ \setminus \Phi'$ について，$K_{\boldsymbol{\alpha}}$ が含まれる．よって，$\mathfrak{h}_{1,\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ への作用は既約となる．

ここでもし，$\mathfrak{h}_1$ の $\mathfrak{p}$ への作用が不変な部分空間を持つと，その複素化も不変な部分空間となることから，$\mathfrak{h}_1$ の $\mathfrak{p}$ への作用も既約である．　□

5.6 $\mathfrak{sp}(r)$ の構造*

3.1.2 項では，解析力学に関連した対称性には，必然的に実シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ が現れることを述べた．しかし，$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ は非コンパクト Lie 群であるため，その取り扱いには様々な困難が伴う．本節でそれを扱うのは不可能であるので，コンパクト Lie 群である $\mathrm{Sp}(r)$ の Lie 環 $\mathfrak{sp}(r)$ を扱う．$\mathrm{Sp}(r)$ も $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ その複素化は同じ複素 Lie 群 $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{C})$ である．そのため，両者の構造には類似点がある．また，$\mathfrak{sp}(r)$ は 5.5 節の議論での分類 C_r に属すコンパクト半単純 Lie 群の例であるので，5.5 節の議論がどのように，$\mathfrak{su}(r)$ 以外の具体例で現れるのか知るにはよい例である．

$\mathbb{C}^r$ 上の行列は複素数倍を $I\otimes J$ と見なすことで，$\mathbb{R}^{2r}$ 上の行列となり，以下に示すように $\mathfrak{u}(r)$ の要素 $X=X_1+iX_2$（X_1,X_2 は実数値行列）は $\mathfrak{sp}(r)$ の要素と見なすことができる．$\tilde{\kappa}(X):=X_1\otimes I_2+X_2\otimes J$ は

$$
\begin{aligned}
&(X_2\otimes I_2+X_2\otimes J)^T J_n=(X_1^T\otimes I_2-X_2^T\otimes J)I_n\otimes J\\
=&(-X_1\otimes I_2-X_2\otimes J)I_n\otimes J=(-X_1\otimes I_2-X_2\otimes J)I_n\otimes J\\
=&-I_n\otimes J(X_1\otimes I_2+X_2\otimes J)
\end{aligned}
$$

を満たすので，$\mathfrak{sp}(r)$ の要素となる．4.1 節で与えた写像 κ の拡張として，$2r$ 次の正方行列 Y に対して，(4.6) で定義した W を用いて

$$\kappa(Y):=(I_r\otimes W)Y(I_r\otimes W)^{-1} \tag{5.33}$$

を与えると，写像 $\tilde{\kappa}$ は $\tilde{\kappa}(X)=\kappa(X\oplus\overline{X})$ を満たす．すると，$\tilde{\kappa}(\mathfrak{u}(r))=\mathfrak{sp}(r)\cap\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$，$\tilde{\kappa}(\mathrm{U}(r))=\mathrm{Sp}(r)\cap\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ が成立する．

したがって，$\mathfrak{u}(r)$ は $\mathfrak{sp}(r)$ の部分代数と見なせる．そのため，以下では，(4.24), (4.25), (4.26), および (4.33) で定義した $F^x_{j,l}$, $F^y_{j,l}$, $F^z_{j,l}$, および $F^{z,u}_j$ を用いて，$\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$ を扱う．そして，$\mathfrak{sp}(r)$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}:=\{X_2\otimes J\,|\,X_2$は$r\times r$の対角行列$\}$ で与えられ，$\mathfrak{u}(r)$ の部分代数となる．すなわち，$\mathfrak{u}(r)$ は $\mathfrak{sp}(r)$ の極大正則部分代数であるので，$\mathfrak{u}(r)$ のルートは $\mathfrak{sp}(r)$ のルートになる．よって，$\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\in\Phi_{\mathfrak{su}(r)}$ は以下のように $\Phi_{\mathfrak{sp}(r)}$ の要素と見なせる．

$$\boldsymbol{\alpha}_{j,l}(X_2\otimes J)=-\langle j|X_2|j\rangle+\langle l|X_2|l\rangle,\quad \forall X_2\otimes J\in\mathfrak{h}.$$

そして，$\boldsymbol{\beta}$ を任意の $X_2 \otimes J \in \mathfrak{h}$ について $\boldsymbol{\beta}(X_2 \otimes J) = -2\langle r|X_2|r\rangle$ が成り立つように定義する．

このとき，

$$(\tilde{\kappa}(X), \tilde{\kappa}(Y))_{\mathfrak{sp}(r)} = -4(r+1)\operatorname{Tr} XY^\dagger, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{u}(r)$$

$$(|r\rangle\langle r| \otimes F_1^z, |r\rangle\langle r| \otimes F_1^z)_{\mathfrak{sp}(r)} = (|r\rangle\langle r| \otimes F_1^y, |r\rangle\langle r| \otimes F_1^y)_{\mathfrak{sp}(r)} = -(r+1)$$

となる．$\Phi^+_{\mathfrak{u}(r)}$ および，$\Phi_{\mathfrak{sp}(r)}$ の基本系 Δ は $\Phi^+_{\mathfrak{u}(r)} = \{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1 \le j < lr}$ および $\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}_{j,j+1}\}_{j=1,\ldots,r-1} \cup \{\boldsymbol{\beta}\}$ で与えられる．したがって，

$$Z_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}} := \frac{-i}{4(r+1)} F^z_{j,l} \otimes J = \frac{1}{4(r+1)}\tilde{\kappa}(F^z_{j,l})$$

$$Z_{\boldsymbol{\beta}} := \frac{1}{2(r+1)}|r\rangle\langle r| \otimes J = \frac{-1}{4(r+1)}\tilde{\kappa}(2F_r^{z,u})$$

は (5.3) を満たす．$(\boldsymbol{\alpha}_{j,l}, \boldsymbol{\alpha}_{j,l}) = \frac{1}{2(r+1)}$, $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{r+1}$ であるので，$\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{r-1,r}\rangle = -2$ となる．よって，$\Phi_{\mathfrak{u}(r)}$ 以外の正のルートは表 5.1 では $e_j + e_l$ と記され，

$$\Phi^+_{\mathfrak{sp}(r)} \setminus \Phi^+_{\mathfrak{u}(r)} = \{\boldsymbol{\beta}_{j,l} := \boldsymbol{\alpha}_{j,l} + 2\boldsymbol{\alpha}_{l,r} + \boldsymbol{\beta}\}_{1 \le j \le l < r} \tag{5.34}$$

で与えられる．（$j = l$ のときは，$\boldsymbol{\alpha}_{j,l} = 0$ とする．）一方 $\{\boldsymbol{\alpha}_{j,j+1}\}_{j=1,\ldots,r-1}$ は $\mathfrak{su}(r)$ のときと同じように与えられる．ここで $\mathfrak{su}(r)$ のときと $\mathfrak{h}$ に入る内積が異なることに注意せよ．(5.34) より，$(\Phi^+_{\mathfrak{sp}(r)}, \Phi_{\mathfrak{u}(r)} \subset \Phi_{\mathfrak{sp}(r)})$ は連結既約放物型システムとなる．

さらに，

$$Z_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}} := \frac{-1}{4(r+1)}(|j\rangle\langle j| + |l\rangle\langle l|) \otimes J = \frac{1}{4(r+1)}\tilde{\kappa}(F_j^{z,u} + F_l^{z,u})$$

は (5.3) を満たし，

$$F^x_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}} := -iF^x_{j,l} \otimes J = \tilde{\kappa}(F^x_{j,l}), \quad F^y_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}} := F^y_{j,l} \otimes I = \tilde{\kappa}(F^y_{j,l})$$

$$F^x_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}} := \frac{1}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle l| + |l\rangle\langle j|) \otimes F_1^z, \quad F^y_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}} := \frac{1}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle l| + |l\rangle\langle j|) \otimes F_1^x$$

は (5.7) と (5.8) を満たす．

5.7 複素構造とコヒーレント状態*

5.5 節では，$\mathfrak{g}$ の極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含む部分 Lie 環と部分ルート系について扱った．この議論を利用して，量子系で重要となるコヒーレント状態をより一般的な設定に拡張する．コヒーレント状態とは基底状態などの安定な状態についての群の作用に関する軌道として与えられる．安定という言葉の意味は，注目する群の部分群の作用に関して不変ということである．そのため，5.5 節で扱った議論が効力を発揮する．コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその極大 Catran 部分代数を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ のルート系が放物型システム $(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ によって特徴付けられるとき，G, H_1 を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1$ に対応する Lie 群とすると，等質空間 G/H_1 には後に述べるように，複素多様体の構造が入る．

以下その具体例として，任意の $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+(\Delta)$ を最大ウェイトとする表現空間 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ が与えられた場合を考える．固定化群 H_1 を最大ウェイトベクトル $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ についての不変部分 Lie 群 $\{g \in G | \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g)^\dagger = |\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}|\}$ とする．すると，対応する部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ は最大ウェイトベクトル $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ についての不変部分 Lie 環 $\{X \in \mathfrak{g} | \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(X)|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}| - |\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(X) = 0\} \subset \mathfrak{g}$ となる．そして，Φ' を部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ のルート系とすると，Φ' は $\{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, \langle\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = 0\}$ と一致し，定理 5.5.1 の条件 **(1)** より，$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ は放物型システムとなる．したがって，コヒーレント状態は $\mathfrak{h}_1$ に対応する群 H_1 が固定化群となる状態の集合として与えられる．そして，$\{F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+_{\boldsymbol{\lambda}}}$ は $\mathfrak{h}_1$ の直交補空間 $\mathfrak{p}$ を生成する．

任意の $\xi = \{\xi_{\boldsymbol{\alpha}} = \xi^x_{\boldsymbol{\alpha}} + \xi^y_{\boldsymbol{\alpha}} i\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$ に対して，$g(\xi) := \exp(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+} 2i(\xi^x_{\boldsymbol{\alpha}} F^y_{\boldsymbol{\alpha}} - \xi^y_{\boldsymbol{\alpha}} F^y_{\boldsymbol{\alpha}}))$ を与え，複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に対応する複素 Lie 群に対して Gauss 分解 (5.13) を適用する．すると，以下を満たす $\tilde{\zeta} = \{\tilde{\zeta}_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$, $\zeta' = \{\zeta'_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$, $\eta = \{\eta_j\}_{j=1}^r$ がとれる．

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g(\xi)) = \exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+} \tilde{\zeta}_{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^r \eta_j \mathsf{E}_j\right) \exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+} \zeta'_{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}\right). \tag{5.35}$$

さらに，5.5 節で述べたように，$\mathfrak{h}_{1,-,\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}}$ が $\mathfrak{n}_- = \mathfrak{h}_{1,-,\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}}$ の部分複素 Lie 環であることから，$\{\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}$ を適切に選ぶと，

$$\exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+}\tilde{\zeta}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}}\right)=\exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+\setminus\Phi'}\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}}\right)\exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi'^+}\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}}\right) \tag{5.36}$$

が成り立つ．

(4.20) で与えられた $U_{\zeta,s}$ の一般化として，U_ζ を (5.35) の右辺に (5.36) の右辺を代入したもので与える．なお，この式は表現 $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ のとり方に依存せずに成り立つ．両辺を $|\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\lambda}'\rangle$ に作用すると，

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g(\xi))|\boldsymbol{\lambda}';\boldsymbol{\lambda}'\rangle\propto\exp\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+\setminus\Phi'}\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}}\right)|\boldsymbol{\lambda}';\boldsymbol{\lambda}'\rangle \tag{5.37}$$

を得る．ξ に対して，ζ が決まり，ζ は ξ に関して連続的に変化する．G, H_1 を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1$ に対応する Lie 群であり，H_1 は状態 $|\boldsymbol{\lambda}';\boldsymbol{\lambda}'\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}';\boldsymbol{\lambda}'|$ に対して両側から群 G を作用させたときの固定化群であった．よって，(5.37) に注目することで，G/H_1 は測度 0 の点を除いて，ζ のとる範囲と同一視できる．したがって，等質空間 G/H_1 は複素 Lie 環 $\mathfrak{p}_{-,\mathbb{C}}$ から生成される複素 Lie 群 $P_{-,\mathbb{C}}$ と同型であることが確認できる．よって，等質空間 G/H_1 には複素多様体としての構造が入る．この議論は，H_1 が $|\boldsymbol{\lambda}';\boldsymbol{\lambda}'\rangle$ の固定化群である限り，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{h}^*$ のとり方にかかわらず成立する．

そして，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{h}^*$ と任意の複素ベクトル $\zeta=\{\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+\setminus\Phi'}$ に対して，コヒーレントベクトル $|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle:=C_\zeta\exp(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+\setminus\Phi'}\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}})|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ を与える．C_ζ は正規化定数である．(5.35), (5.36) を満たすように，ξ を選ぶと，**コヒーレント状態** $\rho_{\boldsymbol{\lambda},\zeta}:=|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}:\zeta|$ は $\rho_{\boldsymbol{\lambda},\zeta}=\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g(\xi))|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g(\xi))^\dagger$ を満たす．集合 $\{\rho_{\boldsymbol{\lambda},\zeta}\}$ の閉包は G の作用に関する $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}|$ の軌道と一致し，等質空間 G/H_1 と一致する．よって，3.7 節の最後で定義した $\Theta:=G/H_1$ 上の不変測度 μ_Θ に注目すると，(3.55) より，(4.23) の一般のコンパクト半単純 Lie 群への一般化として，

$$d_{\boldsymbol{\lambda}}\int_\Theta|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}:\zeta|\mu_\Theta(d\zeta)=I \tag{5.38}$$

を得る．この式は，コヒーレント状態による I の展開が POVM を与えることを示している．

逆に，コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ その極大 Catran 部分代数を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ のルート系が放物型システム $(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ によって特徴付けられるとき，定理 5.5.1 の条件 **(1)** より，適切に $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+(\Delta)$ を選ぶと，$\Phi' = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0\}$ が成り立つ．したがって，このような一般的な場合についても G/H_1 は $\boldsymbol{\lambda}$ を最高ウェイトとする表現空間上の状態 $|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}|$ の軌道として特徴付けられる．そのため上述の議論が適用でき，以下の定理を得る．

定理 5.7.1 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1$ をコンパクト半単純 Lie 群 G およびその部分 Lie 群 H_1 の Lie 環とする．Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ が $\mathfrak{g}$ の極大 Catran 部分代数を含み，そのルート系が既約放物型システム $(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ によって特徴付けられるとき，等質空間 G/H_1 に複素多様体の構造が入る．

次に，$(\Phi^+(\Delta), \Phi' \subset \Phi)$ を連結既約放物型システムとし，$\Delta \backslash \Phi' = \{\boldsymbol{\beta}\}$ とし，$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1$ をこれに対応するコンパクト半単純 Lie 環とその部分 Lie 環とする．$\mathfrak{g}$ の既約な表現空間 $\mathcal{U}_{n\boldsymbol{\beta}}$ の $\mathfrak{h}_1$ の作用に関する既約表現が $\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{V}[\mathsf{K}^j_{\boldsymbol{\beta},-}|n\boldsymbol{\beta}, n\boldsymbol{\beta}\rangle]$ で与えられるとき，$\mathcal{U}_{n\boldsymbol{\beta}}$ は **$\mathfrak{h}_1$-既約**であるという．ただし，$\mathcal{V}[\mathsf{K}^j_{\boldsymbol{\beta},-}|n\boldsymbol{\beta}, n\boldsymbol{\beta}\rangle]$ は $\mathsf{K}^j_{\boldsymbol{\beta},-}|n\boldsymbol{\beta}, n\boldsymbol{\beta}\rangle$ を含む Lie 環 $\mathfrak{h}_1$ の既約な表現空間である．例えば，全てのエルミート型 Dynkin diagram において，$\mathfrak{g} / \mathfrak{h}_1$ の既約性より，$\mathcal{U}_{\boldsymbol{\beta}}$ は **$\mathfrak{h}_1$-既約**である．また，エルミート型 Dynkin diagram のうち，A_nIII 型のうち，$p = 1$ の場合は任意の m において $\mathcal{U}_{m\boldsymbol{\beta}}$ は **$\mathfrak{u}(n-1)$-既約**である

5.8 非コンパクト半単純 Lie 環の構造*

3.1.2 項で解析力学に関連して扱った群は，全て非コンパクト群である．そのため，量子系への応用のためには，非コンパクト群も含めて扱う必要がある．以下では一般のコンパクトでない実半単純 Lie 群 G の構造を調べる．そのために，その Lie 環 $\mathfrak{g}$ について調べる．このとき，半単純であるため，その Killing form は非退化となるが，コンパクトでないため負定値ではない．そのため，$\mathfrak{g}$ を複素化した複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ に注目する．特に，実単純 Lie 環の複素化は複素単純 Lie 環になる．複素化が古典型単純 Lie 環となる非コンパクト半単純 Lie 環は表 3.6 で与えた $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p, q)$, $\mathfrak{su}^*(2m)$, $\mathfrak{so}(p, q)$,

$\mathfrak{so}^*(2m)$, $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(p,q)$ に限られることが知られている [19, p.6]．この節では，全ての非コンパクト半単純 Lie 環を扱うことは避け，解析が容易なクラスに限って扱うことにする．

このために，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実部分ベクトル空間で $\mathfrak{g}$ と同次元で Killing form が負定値となるものを選び $\mathfrak{u}$ と記す．ここで，$\mathfrak{g}$ の任意のコンパクト部分代数 $\mathfrak{h}_0$ に対して，$\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{u}$ となるように選べることに注意せよ．すると，$\mathfrak{u}$ が実コンパクト半単純 Lie 環となる．ここで，$\mathfrak{k} := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}$, $\mathfrak{p} := \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$ とすると，$\mathfrak{k}$ はコンパクト Lie 環となり，**極大コンパクト部分代数**とよばれる．そして，$\mathfrak{g}$ の **Cartan 分解**とよばれる直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を得る [19, p.3]．このとき，Killing form は $\mathfrak{k}$ 上で負定値，$\mathfrak{p}$ 上で正定値である．さらに，$[\mathfrak{u},\mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$, $[\mathfrak{u}, i\mathfrak{u}] \subset i\mathfrak{u}$, $[i\mathfrak{u}, i\mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$ であるので，

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k} \tag{5.39}$$

が成り立つ．$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ であるので，$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] + [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] = \mathfrak{p}$ が成り立つ．ここで，$X_1 \in \mathfrak{k}, X_2 \in \mathfrak{p}$ に対して，写像 $\tau : X_1 + X_2 \mapsto X_1 - X_2$ を定義すると，内積 $B(X,Y) := -(X, \tau(Y))_{\mathfrak{g}}$ は正定値となる．この内積の下で，$X_1 \in \mathfrak{k}, X_2 \in \mathfrak{p}$ に対して，$\mathsf{ad}(X_1), \mathsf{ad}(X_2)$ はそれぞれ，反対称，対称行列となる．さらに，$K := \{\exp(X)\}_{X \in \mathfrak{k}}$, $P := \{\exp(X)\}_{X \in \mathfrak{p}}$ とすると，K は G の極大コンパクト部分群となり，Lie 群の **Cartan 分解** $G = KP$ を得る．

しかし，一般のコンパクトでない実単純 Lie 群 G やその Lie 環 $\mathfrak{g}$ の構造は極めて複雑であり，その一般論を正確に扱うには困難である．以下では，解析を簡単にするため，コンパクトな極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ が存在することを仮定する．物理的に重要な例ではこの条件を満たしていることが多いので，このような場合に限って解析する．

5.2 節の議論と同じようにして，$\mathfrak{g}$ がコンパクトな場合と同じように，$\mathfrak{h}^*$ に内積を定義し，$\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{h}^*$ に対し，$Z_{\boldsymbol{\beta}} \in \mathfrak{h}$ を定義する．そして，$\mathfrak{h}$ の要素が補題 3.5.4 で与えた交代行列となる $\mathfrak{g}$ の基底がとれる．したがって，コンパクトの場合と同じように，$\mathfrak{h}^*$ の部分集合として，$\mathfrak{g}$ のルート系 $\Phi_{\mathfrak{g}}$ と $\mathfrak{k}$ のルート系 $\Phi_{\mathfrak{k}}$ が定義でき，$\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{g}}$ に対して，以下を満たす $\{F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}\}$ を選ぶ．

$$[X, F^x_{\boldsymbol{\alpha}}] = \boldsymbol{\alpha}(X) F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad [X, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}] = -\boldsymbol{\alpha}(X) F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

ここで，半単純性から同一の $\boldsymbol{\alpha}$ に異なる 2 種の基底が対応しないことが定

理 5.3.1 より確認できる．(5.7) と同じように，$[F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}] = -(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} Z_{\boldsymbol{\alpha}} = -(F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} Z_{\boldsymbol{\alpha}}$ が示せ，$(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = (F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}$ となる．

そして，$\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{k}}$ については，$\mathfrak{k}$ がコンパクト Lie 環であることから，$(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}, (F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}$ は負の値となり，$\{F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, Z_{\boldsymbol{\alpha}}\}$ から生成される部分代数は $\mathfrak{su}(2)$ と同型となる．(5.8) と同じように，$(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = (F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$ となるように，$F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}$ の大きさを選ぶこととする．

一方，$\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{p}} := \Phi_{\mathfrak{g}} \setminus \Phi_{\mathfrak{k}}$ については，$F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathfrak{p}$ であるので，$(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}$ は正の数となり，$\{F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, Z_{\boldsymbol{\alpha}}\}$ から生成される部分代数は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ と同型となる．$(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = (F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$ となるように，$F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}$ の大きさを選ぶこととする．このように，$\mathfrak{g}$ の基本系も大きさを含めて $\mathfrak{h}$ に対して一意に決まる．

そして，(5.39) の最後の性質 $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ より，$\mathfrak{k}$ のルート系 $\Phi_{\mathfrak{k}}$ は $\mathfrak{g}$ のルート系 Φ の部分ルート系として既約である．前節までの議論では，$\mathfrak{g}$ がコンパクトであったが，その議論での本質は $\mathfrak{g}$ が半単純であること（すなわち，killing form が非退化）であった．今の場合，$\mathfrak{g}$ がコンパクトでないが半単純であるので，同様の議論が可能となる．このとき，$\mathfrak{g}$ のルート系 Φ，その基本系 $\Delta = \{\boldsymbol{\alpha}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$，その正ルートの集合 $\Phi^+(\Delta)$，$\mathfrak{k}$ のルート系 $\Phi_{\mathfrak{k}}$ を前節の議論と同じように定義する．すると，Lie 環 $\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{g}$ の極大 Catran 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含むという仮定から，$(\Phi^+(\Delta), \Phi_{\mathfrak{k}} \subset \Phi)$ は既約放物型システムとなる．さらに，(5.39) の第 3 式より，$\mathfrak{p}$ のウェイトに注目することにより，$(\Phi^+(\Delta), \Phi_{\mathfrak{k}} \subset \Phi)$ が既約既約放物型システムとなることが確認できる．

このような実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ は**エルミート型**とよばれ，表 5.2 で分類される [26, Theorem A.V.1(c)][18, Appendix C]．すなわち，エルミート型 Lie 環 $\mathfrak{g}$ は既約放物型システムによって記述できる．逆に，既約な放物型システム $(\Phi^+(\Delta), \Phi_{\mathfrak{k}} \subset \Phi)$ に対して，実半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその極大コンパクト Lie 環 $\mathfrak{k}$ で，そのルート系が Φ および $\Phi_{\mathfrak{k}}$ となるものがこれまでの議論を辿ることで構成できる．したがって，エルミート型の単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の分類は，連結既約放物型システムの分類に帰着される．

5.9 非コンパクト単純 Lie 環の歪エルミート表現*

次に，非コンパクト単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の歪エルミート表現を扱う．非コンパク

表 5.2　エルミート型 Lie 環

型	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$	$\mathfrak{k}$
$A_n\mathrm{III}$ $p+q=n$	$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{su}(q)\oplus\mathfrak{u}(1)$
$B_n\mathrm{I}$	$\mathfrak{so}(2n-1,2)$	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n-1)$
$C_n\mathrm{I}$	$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{u}(n)$
$D_n\mathrm{I}$	$\mathfrak{so}(2n-2,2)$	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n-2)$
$D_n\mathrm{III}$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{u}(n)$
$E_6\mathrm{III}$	$\mathfrak{e}_6^{-14}$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$
$E_7\mathrm{VII}$	$\mathfrak{e}_7^{-25}$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$

ト単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現には最大ウェイトが存在しないものが存在する．しかし，現実の量子系には最大ウェイトが存在する表現（以下**最大ウェイト表現**とよぶ．文献 [19] によっては**離散系列表現**とよばれる）が現れることが多い．

非コンパクト単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ はコンパクトな極大 Cartan 部分代数が存在するとき，最大ウェイト表現を持つ [19, Theorem 9.20]．以下では，詳しい解析を容易にするため，より強い条件として，$\mathfrak{g}$ が エルミート型の単純 Lie 環である場合を扱う．したがって，以下では $\mathfrak{g}$ が上記の条件を満たすと仮定し，最大ウェイト表現のみ扱う．$\mathfrak{g}$ の歪エルミート表現 f の下で，単純ルート $\boldsymbol{\alpha}_j\in\Delta$ と正のルート $\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+(\Delta)$ に対して，

$$\mathsf{E}_j := -i\mathsf{f}(Z_{\alpha_j}),\quad \mathsf{K}_{\pm\boldsymbol{\alpha}} := -i\mathsf{f}(F^x_{\boldsymbol{\alpha}})\mp\mathsf{f}(F^y_{\boldsymbol{\alpha}}) \tag{5.40}$$

を定義する．すると，任意のルート $\boldsymbol{\alpha}\in\Phi$ について

$$[\mathsf{E}_{j'},\mathsf{E}_j]=0 \tag{5.41}$$

$$[\mathsf{E}_{j'},\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}]=\boldsymbol{\alpha}(Z_{\alpha_j})\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}} \tag{5.42}$$

が成り立つ．そして，表現の歪エルミート性から $(\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}})^\dagger=\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}}$ および，E_j のエルミート性が得られる．

以下，歪エルミート表現 f は既約であるとし，全ての $\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+$ に対して，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle=0$ を満たし，$\mathsf{E}_1,\dots,\mathsf{E}_r$ の同時固有ベクトルとなる $\mathcal{H}$ の正規化された要素 $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ (**最大ウェイトベクトル**) が存在するとする．このような表現を**最大ウェイト表現**とよぶ．

このとき，$\mathfrak{h}^*$ の要素 $m \in \mathfrak{h}^*$ で

$$\mathcal{U}_m^w := \{v \in \mathcal{U} \mid \mathsf{f}(X)v = im(X)v,\ \forall X \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}$$

となるものを**ウェイト**とよぶ．特に，任意の $X \in \mathfrak{h}$ について $\mathsf{f}(X)|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle = i\boldsymbol{\lambda}(X)|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ となるウェイト $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ を**最大ウェイト**とよぶ．これにより既約歪エルミート表現は一意に定まる．特に，$\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}^w = \mathbb{R}|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ となり，この表現の表現空間を $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と表し，表現を $\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ とする．このときのウェイトの集合を $\Lambda(\boldsymbol{\lambda})$ と記す．

これまでの議論と同じように，表現空間 $\mathcal{H}$ は $\{\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^-}(\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}})^m|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\}$ によって生成される．よって，(5.41) より，$\mathcal{H}$ は $\mathfrak{h}$ の要素についての同時固有空間への分解を与えるウェイト m を用いて，$\mathcal{H} = \bigoplus_m \mathcal{U}_m^w$ で与えられる．

$\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{k}}^+(\Delta)$ について，$\{F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, [F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y]\}$ で生成される部分空間は $\mathfrak{su}(2)$ と同型である．そのため，これらの要素の作用については $\mathfrak{su}(2)$ の歪エルミート表現となり，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ は

$$\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}\rangle = -2\boldsymbol{\lambda}([F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y]) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{5.43}$$

を満たす．一方，任意の $\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+(\Delta) \setminus \Phi_{\mathfrak{k}}^+(\Delta)$ について，$\{F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y, [F_{\boldsymbol{\alpha}}^x, F_{\boldsymbol{\alpha}}^y]\}$ で生成される部分空間は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ と同型である．そのため，これらの要素の作用については $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の歪エルミート表現となるので，任意の $m \in \Lambda(\boldsymbol{\lambda})$ について，$\langle m,\boldsymbol{\alpha}\rangle \leq 0$ が成り立つ．これは，$\boldsymbol{\lambda} = 0$ でない限り，

$$\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}\rangle < 0 \tag{5.44}$$

が成り立つことを意味する．

逆に，$\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ が **Harish-Chandra 条件**:

$$\langle\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda}(\Phi)\rangle < 0 \tag{5.45}$$

を満たすとき，$\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ を最大ウェイトに持つ既約表現な歪エルミート表現が存在する [26, p.547][19, p.158][10, Lemma 27]．さらに，このとき，表現空間 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の形式的次元 $d_{\boldsymbol{\lambda}}$ は Weyl の次元公式の非コンパクト版である Harish-Chandra による形式的次元に関する公式

$$d_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+(\Delta)}|\langle\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\alpha}\rangle|}{\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+(\Delta)}\langle\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$$

を満たす [10, Theorem 4][26, p.547].

既約歪エルミート表現の最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ が

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \Delta \cap \Phi_{\mathfrak{k}} \tag{5.46}$$

を満たすとする．コンパクトな場合と同様にして，表現空間の既約分解が $\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{V}[\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\beta}}^{j}|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}\rangle]$ で与えられるとき，$\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は **$\mathfrak{k}$-既約**であるという．例えば，$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{su}(1, n-1)$ の場合は (5.46) を満たす最大ウェイト表現は $\mathfrak{u}(n-1)$-既約である．

次に，5.7 節と同じように，$\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ を非自明な（0 でない）最大ウェイトとする $\mathfrak{g}$ の既約歪エルミート表現についてコヒーレント状態を定義しよう．$\mathfrak{h}_1$ を最大ウェイト状態 $|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}|$ を不変にする部分代数とする．すると，$\mathfrak{h}_1$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含み，そのルート系 $\Phi_{\mathfrak{h}_1}$ は $\{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}) = 0\}$ で与えられる．

$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}^{+} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi^{+} \,|\, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}) \neq 0\}$ とおいて，複素ベクトル $\zeta = \{\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\boldsymbol{\lambda}}^{+}}$ に対して，**コヒーレントベクトル** $|\boldsymbol{\lambda} : \zeta\rangle := C_{\zeta} \exp(\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\boldsymbol{\lambda}}^{+}} \zeta_{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}})|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}\rangle$ を定義する．ここで，C_{ζ} は $|\boldsymbol{\lambda} : \zeta\rangle$ のノルムが 1 になるように選ぶこととする．すると，5.7 節の議論と同じように，複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に対応する複素 Lie 群に対して Gauss 分解 (5.13) を適用することで，一般の最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ と ζ について (5.35) を満たす ξ, ζ', η が存在することが示せる．したがって，**コヒーレント状態** $\rho_{\boldsymbol{\lambda},\zeta} := |\boldsymbol{\lambda} : \zeta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda} : \zeta|$ は $\rho_{\boldsymbol{\lambda},\zeta} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g(\xi))|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\lambda}|\mathsf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(g(\xi))^{\dagger}$ を満たす．Harish-Chandra 条件 (5.45) が成り立つときは，3.7 節の最後で定義した $\Theta := G/H_1$ 上の不変測度 μ_{Θ} に注目すると，(3.55) より，(5.38) の一般の非コンパクト半単純 Lie 群への一般化として，

$$d_{\boldsymbol{\lambda}} \int_{\Theta} |\boldsymbol{\lambda} : \zeta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda} : \zeta| \mu_{\Theta}(d\zeta) = I \tag{5.47}$$

を得る．ここで，$d_{\boldsymbol{\lambda}}$ は形式的次元である [10, Theorem 4]．この式は，コヒーレント状態による I の展開が POVM を与えることを示している．

さらに，定理 5.7.1 と同様に，適切な最大ウェイト表現を考えることで，以下の定理を示すことができる．

定理 5.9.1　G をエルミート型 Lie 群，K をその極大コンパクト部分 Lie 群 K とする．このとき，等質空間 G/K に複素多様体の構造が入る．

5.10 一般の非コンパクトLie環とその歪エルミート表現*

これまでは Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して，半単純性を課していたが，以下では，必ずしも半単純性を満たさない実 Lie 環について扱う．しかし，完全に一般の実 Lie 環を扱うのは困難を伴うので，$\mathfrak{g}$ のコンパクトな極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ が存在すると仮定する．このとき，$\mathfrak{h}$ を含む極大コンパクト部分代数 $\mathfrak{k}$ が存在する．$\mathfrak{h}$ の中心 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{h} \,|\, a(X,X)_{\mathfrak{g}} = 0\}$ の要素は全ての $\mathfrak{g}$ の要素と可換となる．そのため商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ と同型となる $\mathfrak{g}$ の部分空間を $\mathfrak{g}_0$ とし，$\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ とする．半単純な場合と同じように，$\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{h}_0^*$ に対する $Z_{\boldsymbol{\beta}}$ および，$\mathfrak{h}_0^*$ 上の正定値な内積 (,) を定義する．$\mathfrak{h}_0$ の全ての要素は可換であるので，同時に補題3.5.4の(3.46)の形になるように，空間 $\mathfrak{g}_0$ 内の $\mathfrak{h}_0$ の直交補空間の直交補空間の基底 $\{F_j^x, F_j^y\}$ を選び，各 j に対して適切な $\boldsymbol{\alpha}_j \in \mathfrak{h}_0^*$ を選ぶと，任意の元 $X \in \mathfrak{h}_0$ に対して

$$\mathsf{ad}(X)F_j^x = \boldsymbol{\alpha}_j(X)F_j^y, \quad \mathsf{ad}(X)F_j^y = -\boldsymbol{\alpha}_j(X)F_j^x \tag{5.48}$$

が成り立つ．

以下では，上の条件を満たす $\boldsymbol{\alpha}_j$ の集合を $\Phi_{\mathfrak{g}}^+$ とし，$\boldsymbol{\alpha}_j, -\boldsymbol{\alpha}_j$ の集合を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ とする．このとき，$\Phi_{\mathfrak{g}}^+ = \{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi \,|\, \boldsymbol{\alpha}(X_1) > 0\}$ となる $X_1 \in \mathfrak{h}_0$ が存在するように，F_j^y の符号を選ぶこととする．Φ は $\mathfrak{h}_0^*$ を生成するが，$\mathfrak{g}$ は半単純とは限らない．そのため，Φ は ルート系の条件を満たすとは限らないが，Φ をルート集合とよぶことにする．極大コンパクト部分代数 $\mathfrak{k}$ のルート系 $\Phi_{\mathfrak{k}}$ は Φ の部分集合となり，$\Phi_{\mathfrak{p}} := \Phi \setminus \Phi_{\mathfrak{k}}$ とする．

そして，$\mathfrak{g}_0$ の分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{k}}^+} \mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}] \oplus \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{p}}^+} \mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}]$ を考える．ただし，$\Phi_{\mathfrak{k}}^+ := \Phi_{\mathfrak{k}} \cap \Phi^+$, $\Phi_{\mathfrak{p}}^+ := \Phi_{\mathfrak{p}} \cap \Phi^+$ とした．このとき，$\Phi_{\mathfrak{k}} \subset \Phi$ に対して定理5.5.1の**(2)(3)(4)**の同値性を示すことができ，この条件を満たすとき，$(\Phi^+, \Phi_{\mathfrak{k}} \subset \Phi)$ を放物型システムという．これに加え，随伴表現から得られる $\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong \mathfrak{p} := \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in \Phi_{\mathfrak{p}}^+} \mathfrak{g}[\boldsymbol{\alpha}]$ への表現が既約であるとき，$\mathfrak{g}$ はエルミート型という．このとき，$\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ への表現に関する最大ウェイト $\boldsymbol{\gamma}$ が $\Phi_{\mathfrak{p}}^+$ の最大の要素となり，$\Phi_{\mathfrak{p}}^+ = (\boldsymbol{\gamma} - span_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Delta_{\mathfrak{k}}) \cap \Phi^+$ が成り立つ．ここで，$\Delta_{\mathfrak{k}}$ は $\Phi_{\mathfrak{k}}$ の基本系である．

$\mathfrak{g}$ の表現 f に対して，$\mathsf{K}_{\pm\boldsymbol{\alpha}}$ を(5.40)と同じように定義すると，任意の $X \in \mathfrak{h}$ に対して，$[-i\mathsf{f}(X), \mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}] = \boldsymbol{\alpha}(X)\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}$ が同様に成り立つ．以下では，最大ウェ

イトベクトルが存在する最大ウェイト表現について考える．しかし，一般の場合に，表現が歪エルミートとなるための最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ が満たすべき必要十分条件を書き下すのは容易ではない．特に，$\mathfrak{g}$ がエルミート型であり，最大ウェイト $\boldsymbol{\lambda}$ が $\Delta_{\mathfrak{k}}$ と直交し，表現空間の既約分解が最大ウェイトベクトル $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ を用いて，$\bigoplus_{j=0}^{\infty}\mathcal{V}[\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\gamma}}^{j}|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle]$ で与えられるとき，$\mathcal{U}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は $\mathfrak{k}$-既約であるという．

次に，5.7 節と同じように，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{h}_0^*$ を最大ウェイトとする $\mathfrak{g}$ の既約歪エルミート表現についてコヒーレント状態を定義しよう．$\mathfrak{h}_1$ を最大ウェイト状態 $|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle\langle\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}|$ を不変にする部分代数とし，$\mathfrak{k}$ に含まれると仮定する．すると，$\mathfrak{h}_1$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を含み，そのルート系 $\Phi_{\mathfrak{h}_1}$ は $\{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi\,|\,\boldsymbol{\lambda}(Z_{\boldsymbol{\alpha}})=0\}$ で与えられる．$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}^{+}:=\{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi_{\mathfrak{k}}^{+}\,|\,\boldsymbol{\lambda}(Z_{\boldsymbol{\alpha}})\neq 0\}$ とすると，複素ベクトル $\zeta=\{\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}^{+}}$ に対して，コヒーレントベクトル $|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle:=C_{\zeta}\exp(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}^{+}}\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}})|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}\rangle$ を定義する．ここで，C_{ζ} は $|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle$ のノルムが 1 になるように選ぶこととする．

$\mathfrak{h}_1$ に対応する群 H_1 を考えると，等質空間 G/H_1 は集合 $\{|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}:\zeta|\}_{\zeta}$ の閉包で与えられる．したがって，(3.53) で形式的次元 $d_{\boldsymbol{\lambda}}$ が定義できる場合は，ζ を等質空間 G/H_1 の要素と見なし，3.7 節の最後で定義した $\Theta:=G/H_1$ 上の不変測度 μ_{Θ} に注目すると，(5.47) の半単純性を満たさない場合への一般化として，$d_{\boldsymbol{\lambda}}\int_{\Theta}|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}:\zeta|\mu_{\Theta}(d\zeta)=I$ が成り立つ．この式は，**コヒーレント状態** $\rho_{\boldsymbol{\lambda},\zeta}:=|\boldsymbol{\lambda}:\zeta\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}:\zeta|$ による I の展開が POVM を与えることを示している．

このように，前節の議論は半単純性を満たさない場合にも一般化できる．次の章では，このような場合の具体例を扱う．

第 6 章

Bose 粒子系

1つの量子的な状態に複数の状態をとり得る粒子は Bose 粒子とよばれる．Bose 粒子の例として，光子が知られている．このような系では，先に与えた Heisenberg 群の表現が与えられ，光子の場合，この表現によるコヒーレント状態は，コヒーレント光とよばれ，自然に現れる．その他，SU(1,1) に対応する操作は，スクイジングとよばれ，光子が1つも存在しない状態である真空状態をスクイジングして得られる状態は，スクイズド状態とよばれ，量子光子系の場合に大変重要な役割を果たす．また，Heisenberg 群は解析力学における，位置，運動量を移動させる変換であった．Heisenberg 群の積を保存する変換として正準変換が特徴付けられるが，Heisenberg 群による位置，運動量の移動に対応する変換と正準変換を同時に実現する表現についても，本章では扱う．

6.1 1モードの Bose 粒子系

6.1.1 1自由度の量子系

本節では，1モードの Bose 粒子系を扱うが，最初に，これと数学的に同じ構造を持つ1次元の自由度を持つ粒子の量子系（すなわち，1自由度の量子系）を扱う．これは，1次元空間 $\mathbb{R}$ 上の粒子の位置に関する量子系で，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ への関数で，自乗可積分なものの集合 $L^2(\mathbb{R})$ で与えられる．この系では，位置

を与える物理量は以下の掛け算作用素 Q で与えられる.

$$(\mathsf{Q}f)(x) := xf(x). \tag{6.1}$$

一方, 運動量を与える作用素は以下の作用素 P を用いて $\hat{\mathsf{P}} := \lambda\mathsf{P}$ で与えられる.

$$(\mathsf{P}f)(x) := -i\frac{d}{dx}f(x). \tag{6.2}$$

Q, P は条件 $\mathsf{Q}^\dagger = \mathsf{Q}$, $\mathsf{P}^\dagger = \mathsf{P}$ を満たすため, 自己共役作用素になる [30]. そして, この作用素は以下の交換関係を満たす.

$$[\mathsf{Q}, \mathsf{P}] = iI. \tag{6.3}$$

すなわち, 2つの物理量の間には交換関係

$$[\mathsf{Q}, \hat{\mathsf{P}}] = i\lambda I \tag{6.4}$$

が成り立つ. なお, λ は物理的には **Plank 定数**とよばれる量に対応し, h と記述されることが普通であるが, 表現論的な記号の一貫性のため, λ を用いることとする. したがって,

$$\mathsf{f}(P) = i\lambda\mathsf{P},\ \mathsf{f}(Q) = i\mathsf{Q},\ \mathsf{f}(Z) = i\lambda I \tag{6.5}$$

とすると, f は $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R})$ の歪エルミート表現となる. この表現は, $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ変換 $f(x) \mapsto \lambda^{1/4}f(\lambda^{1/2}x)$ の下で, 以下の表現と同値となる.

$$\mathsf{f}(P) = i\sqrt{\lambda}\mathsf{P},\ \mathsf{f}(Q) = i\sqrt{\lambda}\mathsf{Q},\ \mathsf{f}(Z) = i\lambda I. \tag{6.6}$$

$\lambda \neq 0$ のとき, この表現は既約表現になる. 任意の $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R})$ の既約歪エルミート表現は上記の表現に限られる事実は Stone-von Neumann の定理 [44] とよばれ知られている.

$[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0$ のときに成り立つ **Hausdorff の公式**

$$e^X e^Y = e^{\frac{1}{2}[X,Y]}e^{X+Y} \tag{6.7}$$

を用いると, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip)$, $\zeta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(q'+ip')$ のとき, 交換関係 (6.10) から上記の Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ の表現 f は関係式

$$\mathsf{W}(\zeta) := \mathsf{f}(\exp(pQ - qP) = \exp(i(p\mathsf{Q} - q\mathsf{P}) = \exp(\zeta\mathsf{a}^\dagger - \overline{\zeta}\mathsf{a})$$

$$= e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}} \exp(\zeta \mathsf{a}^\dagger) \exp(-\overline{\zeta}\mathsf{a}) \tag{6.8}$$

$$\mathsf{W}(\zeta)\mathsf{W}(\zeta') = e^{\frac{1}{2}(\zeta\overline{\zeta'} - \zeta'\overline{\zeta})}\mathsf{W}(\zeta+\zeta') = e^{\frac{i}{2}(q'p - qp')}\mathsf{W}(\zeta+\zeta')$$

を満たす．そして，$\vec{z} = (q,p)^T$ を引数にとるとき，$\mathsf{W}(\zeta)$ を $\mathsf{W}(\vec{z})$ と記すと，$\mathsf{W}(\sqrt{\lambda}\vec{z})e^{i\lambda\theta}$ は Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) = \{g_h(\vec{z},\theta)\}$ のユニタリ表現となり，**Heisenberg 表現**とよぶ．

一方，$\mathbb{R}^2 \ni (q,p) \mapsto \mathsf{W}(\sqrt{\lambda}\zeta)$ は因子団 $\{e^{\frac{i\lambda}{2}(q'p-qp')}\}_{(q,p),(q',p')}$ を持つ群 $\mathbb{R}^2$ の射影的ユニタリ表現と見なせる．この表現を **Heisenberg 表現**とよぶ．上記の Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) = \{g_h(\vec{z},\theta)\}$ の Heisenberg 表現をこの表現と区別する必要があるときは，$\mathbb{R}^2$ の Heisenberg 表現とよぶ．そして，因子団が $\{e^{\frac{i\lambda}{2}(q'p-qp')}\}_{(q,p),(q',p')}$ となる $\mathbb{R}^2$ の射影的ユニタリ表現は Heisenberg 表現 $\mathsf{W}(\sqrt{\lambda}\vec{z})$ に限られる．

そして，この表現は

$$\mathsf{W}(\sqrt{\lambda}\zeta)^{-1}\mathsf{Q}\mathsf{W}(\zeta) = \mathsf{Q} + \sqrt{\lambda}qI, \quad \mathsf{W}(\sqrt{\lambda}\zeta)^{-1}\mathsf{P}\mathsf{W}(\zeta) = \mathsf{P} + \sqrt{\lambda}pI \tag{6.9}$$

を満たすので，位置，および，運動量を移動させる変換に対応する表現であると考えることができる．そのため，ユニタリ作用素 $\mathsf{W}(\sqrt{\lambda}\zeta)$ は**シフト変換**とよばれる．

6.1.2 1モードのBose粒子系と1自由度系との関係

次に，1種類しか1つの粒子のとり得る状態がない場合での，Bose粒子系を扱う．そのような量子系は1モードの量子系とよばれる．例えば，ある光子が同じ振動数で同じ方向に進み，同じ場所に局在している場合，これらは同じモードにあるという．Bose粒子の場合，注目しているモードに同時にたくさんの粒子が存在することが可能である．そのため，粒子の個数 n に応じた状態が存在する．n 粒子の状態ベクトル（**個数ベクトル**）を $|n\rangle$ と書くことにする．ここで，$|n\rangle$ は長さ1のベクトルとし，異なる n,m について $|n\rangle$ と $|m\rangle$ は互いに直交するとする．状態 $|0\rangle\langle 0|$ は真空状態とよばれる．すると，1モードのBose粒子の量子系は正規直交基底系 $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ で生成される空間 $\ell^2 := \left\{\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\right\}$ になる．ただし，x_n は複素数である．

そして，ℓ 上の**消滅作用素** a を $\mathsf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ を満たすものとして定義する．その共役作用素 $\mathsf{a}^\dagger$ は**生成作用素**とよばれ，$\mathsf{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ を

満たす．すると，上の定義から以下の関係式を示すことができる．

$$[\mathsf{a}, \mathsf{a}^\dagger] = I. \tag{6.10}$$

ただし，I は恒等作用素である．作用素 $\mathsf{N} := \mathsf{a}^\dagger \mathsf{a}$ は

$$\mathsf{N}|n\rangle = \mathsf{a}^\dagger \mathsf{a}|n\rangle = \mathsf{a}^\dagger \sqrt{n}|n-1\rangle = n|n\rangle \tag{6.11}$$

を満たすため，**個数作用素**とよばれる．

しかしながら，1 モードの Bose 粒子の量子系を数列空間 ℓ^2 として扱うだけでは，色々と不都合が生じる．数列空間 ℓ^2 と先に与えた $L^2(\mathbb{R})$ を同一視することで，$L^2(\mathbb{R})$ に定義した様々な概念が利用できて，応用の幅が広がる．

初めに，$|n\rangle$ を n 次のエルミート関数 $\psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ と考える．すると，自然に数列空間 ℓ^2 と $\mathbb{R}$ 上の二乗可積分関数の空間 $L^2(\mathbb{R})$ との間に同型が与えられる．以下では，この同型の下で，1 モードの Bose 粒子の量子系 ℓ^2 と 1 自由度の量子系 $L^2(\mathbb{R})$ を同一視する．

すると，$\lambda = 1$ とした場合に，関係式 $\mathsf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{a} + \mathsf{a}^\dagger)$, $\mathsf{P} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\mathsf{a} - \mathsf{a}^\dagger)$ が成り立つ．同様に，$\mathsf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{Q} + i\mathsf{P})$, $\mathsf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{Q} - i\mathsf{P})$ および $\mathsf{N} = \frac{1}{2}(\mathsf{P}^2 + \mathsf{Q}^2 - I)$ も成り立つ．特に，振動数 f（角振動数 $\omega = 2\pi f$）の光子からなる量子系の場合，Q は電磁場のベクトルポテンシャル A に対応し，P は電磁場の電界 E に対応する．A および E は誘電率 ϵ_0 およびプランク定数 h を用いて，

$$A = \sqrt{\frac{h}{2\pi\omega\epsilon_0}}\mathsf{Q}, \ E = -\sqrt{\frac{h\omega}{2\pi\epsilon_0}}\mathsf{P} \tag{6.12}$$

で与えられる [39, 2.1 節]．

a を用いると関係式 (6.9) は以下の 1 つの式で表すことができる．

$$\mathsf{W}(\zeta)^{-1}\mathsf{a}\mathsf{W}(\zeta) = \mathsf{a} + \zeta I \tag{6.13}$$

量子系 $L^2(\mathbb{R})$ で基本的な測定は，自己共役作用素 P, Q のスペクトル測度による測定 $E_{\mathsf{Q}}, E_{\mathsf{P}}$ と，N のスペクトル測度による測定 E_{N} が存在する．(6.11) より，N のスペクトル分解は $\sum_{n=0}^{\infty} n|n\rangle\langle n|$ となり，非負の整数にのみ固有値を持つ．

そして，上記の対応関係を用いて，Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ の Heisenberg 表現の下でのコヒーレントベクトルを以下で与える．

$$|\zeta\rangle := e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}} \exp(\zeta \mathsf{a}^\dagger)|0\rangle = e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{6.14}$$

(6.8) より，$|\zeta\rangle = \mathsf{W}(\zeta)|0\rangle$ となり，コヒーレントベクトルはユニタリ表現の作用を用いて表すことができる．$|\zeta\rangle$ は $\mathsf{a}|\zeta\rangle = \zeta|\zeta\rangle$ を満たすので，$\langle\zeta|\mathsf{a}|\zeta\rangle = \zeta$ すなわち，$\langle\zeta|\mathsf{Q}|\zeta\rangle = x$, $\langle\zeta|\mathsf{P}|\zeta\rangle = y$ が成り立つ．

さらに，

$$\int_{\mathbb{C}} |\zeta\rangle\langle\zeta| \frac{dqdp}{2\pi} = I \tag{6.15}$$

が成り立ち，コヒーレント状態 $|\zeta\rangle\langle\zeta|$ により，測定が定義される．この測定はヘテロダイン測定とよばれる．

ここで，4.2 節で与えた $\mathfrak{su}(2), \mathfrak{su}(1,1)$ のコヒーレント状態との比較を考えよう．(6.15) は $\frac{dqdp}{2\pi}$ を $\mathbb{C}$ の不変測度とすると，形式的次元が 1 となることを示している．この不変測度は $\frac{dqdp}{2\pi(1+s|\zeta|^2)^2}$ で $s=0$ を代入したものに等しいので，$\mathbb{C}$ を Θ_0 と記すことにする．

$Q_X(\zeta) := \langle\zeta|X|\zeta\rangle$ を作用素 X の **Q 関数**とよぶが，X が状態のときは，ヘテロダイン測定を行ったときの，測定値 ζ についての確率密度関数となる．一方，作用素 X に対して，$X = \int_{\mathbb{C}} P(\zeta)|\zeta\rangle\langle\zeta|\frac{dqdp}{2\pi}$ を満たす関数 $P(\zeta)$ は一意に定まり，**P 関数**とよばれる．

6.1.3　1モードのBose粒子系の性質

ここで，(1.8) で定義した $\Delta_\rho \mathsf{P}$ と $\Delta_\rho \mathsf{Q}$ の関係を見るために，2つの作用素 X, Y に対して，エルミートな内積 $(X,Y) := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(XY^\dagger + YX^\dagger)\rho$ を注目する．$X = \mathsf{Q} - (\mathrm{Tr}\,\mathsf{Q}\rho)I$, $Y = i(\mathsf{P} - (\mathrm{Tr}\,\mathsf{P}\rho)I)$ の場合にこの内積に関する Schwartz の不等式を適用する．すると，**不確定性関係**

$$\Delta_\rho \mathsf{P} \Delta_\rho \mathsf{Q} \geq \frac{1}{2}|\mathrm{Tr}[\mathsf{P} - (\mathrm{Tr}\,\mathsf{P}\rho)I, \mathsf{Q} - (\mathrm{Tr}\,\mathsf{Q}\rho)I]\rho| = \frac{1}{2} \tag{6.16}$$

を得る．したがって，(1.9) で与えた記号を用いて定義される行列 $\Delta_\rho[\mathsf{Q}:\mathsf{P}] := \begin{pmatrix} \Delta_\rho \mathsf{Q} & \Delta_\rho \mathsf{Q} \circ \mathsf{P} \\ \Delta_\rho \mathsf{Q} \circ \mathsf{P} & \Delta_\rho \mathsf{P} \end{pmatrix}$ の行列式は

$$\sqrt{\det \Delta_\rho[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]} \geq \frac{1}{2} \tag{6.17}$$

を満たす．さらに，$x, y \geq 0$ に対して $x + y \geq 2xy$ が成り立つことから，

$$\Delta_\rho^2 \mathsf{P} + \Delta_\rho^2 \mathsf{Q} \geq 2\Delta_\rho \mathsf{P} \Delta_\rho \mathsf{Q} \geq 1 \tag{6.18}$$

を得る．そして，$\zeta = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$ とすると，(6.13) より，

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|\mathsf{a}^\dagger \mathsf{a}|0\rangle = \langle\zeta|\mathsf{W}(\zeta)\mathsf{a}^\dagger \mathsf{W}(\zeta)^\dagger \mathsf{W}(\zeta)\mathsf{a}\mathsf{W}(\zeta)^\dagger|\zeta\rangle \\ &= \langle\zeta|\frac{1}{2}((\mathsf{Q}-q)^2 + (\mathsf{P}-p)^2 - i[\mathsf{Q}-qI, \mathsf{P}-pI])|\zeta\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\Delta^2_{|\zeta\rangle\langle\zeta|}\mathsf{P} + \Delta^2_{|\zeta\rangle\langle\zeta|}\mathsf{Q} - 1) \end{aligned} \tag{6.19}$$

となり，$\rho = |\zeta\rangle\langle\zeta|$ のとき，(6.18) において等号を得る．特に，(6.18) の第1不等式の等号成立条件から，

$$\Delta^2_{|\zeta\rangle\langle\zeta|}\mathsf{P} = \Delta^2_{|\zeta\rangle\langle\zeta|}\mathsf{Q} = \frac{1}{2} \tag{6.20}$$

を得る．このように，コヒーレント状態の場合，P と Q のばらつき度合いが同じになる．

一般に，1モードのボース粒子系でのハミルトニアンは N の定数倍で与えられることが多い．そのため，状態 $\rho_N := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{(N+1)^n}|n\rangle\langle n|$ は**熱平衡状態**とよばれ，しばしば重要視される．N は $N = \mathrm{Tr}\,\rho_N \mathsf{N}$ を満たすので，**平均個数**とよばれる．平均個数 N に対して，パラメータ t を適切に選ぶと，$\rho_N = \frac{e^{t\mathsf{N}}}{\mathrm{Tr}\, e^{t\mathsf{N}}}$ が成り立つ．また，$\zeta = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$ とすると，$\rho_N = \int_{\mathbb{C}} |\zeta\rangle\langle\zeta| e^{-\frac{|\zeta|^2}{N}} \frac{dqdp}{2\pi N}$ が成り立つことから，熱平衡状態はガウス積分に関するコヒーレント状態についての平均状態と一致する．

6.1.4　拡大 Heisenberg 表現

上記の Heisenberg 表現ではコヒーレントベクトルを Lie 環のコンパクト極大 Cartan 部分代数を用いて特徴付けることができない．そのため，第3章で与えたコヒーレントベクトルの特徴付けができない．第3章で与えたコヒーレントベクトルの特徴付けを行うため，$\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ を含むより大きな群を考える．

初めに，$g \in \mathrm{U}(1)$ の $\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ への作用 T を以下で与える．

$$T(e^{i\eta})g_h(q,p,\theta) = g_h(\cos\eta q - \sin\eta p, \sin\eta q + \cos\eta p, \theta) \tag{6.21}$$

この作用に基づく半直積群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ を拡大1自由度Heisenberg群とよぶことにする．F を $\mathfrak{u}(1)$ の生成元とすると，拡大1自由度Heisenberg群のLie 環 $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1)$ は以下の交換関係を満たす F,Q,P,Z によって生成される

$$[F,Q] = -P, \quad [F,P] = Q, \quad [F,Z] = 0. \tag{6.22}$$

したがって，6.1.1項の議論から，Lie 環 $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1)$ の既約歪エルミート表現 f は $\lambda_Z, \lambda_F \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$-i\mathsf{f}(Q) = \sqrt{\lambda_Z}\mathsf{Q}, \ -i\mathsf{f}(P) = \sqrt{\lambda_Z}\mathsf{P}, \ -i\mathsf{f}(Z) = \lambda_Z I \tag{6.23}$$

で与えられるものと同型となる．問題は，$\mathsf{E} := -i\mathsf{f}(F)$ の形であるが，交換関係(6.22)より $[-i\mathsf{E},\mathsf{a}] = -i\mathsf{a}$ を得る．このことから，

$$\mathsf{E} = -i\mathsf{f}(F) = -\mathsf{a}^\dagger\mathsf{a} + \lambda_F \tag{6.24}$$

を得る．

Lie 環 $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1)$ において，$\{F,Z\}$ で生成される部分空間 $\langle F,Z\rangle$ がCartan 部分代数となる．したがって，(6.23),(6.24)で与えた表現においては，I と E の同時固有ベクトル（ウェイトベクトル）は $\{|n\rangle\}_{n=0}^\infty$ となる．$|n\rangle$ についての I, E の固有値（ウェイト）は $\lambda_Z, \lambda_F - n$ となる．この表現では，最大ウェイトが (λ_Z,λ_F) となり，最大ウェイトベクトルは真空ベクトル $|0\rangle$ となる．一般の表現は(6.23),(6.24)で与えられるため，Lie 環 $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1)$ の歪エルミート表現は最大ウェイト (λ_Z,λ_F) によって定まり，その表現空間を $\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F}$ と記す．Lie環を指定する必要があるときは $\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F}(\mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1))$ と記す．λ_Z が1でない場合は，(q,p) に対する適当な変換で $\lambda_Z = 1$ の場合に帰着できるので，以下，$\lambda_Z = 1$ の場合のみ扱う．この場合，$\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F}$ を $\mathcal{U}_{\lambda_F}$ と略す．

次に，この表現がどのような場合に，1自由度Heisenberg群の表現を与えることができるか調べる．そのためには，写像 $\mathsf{U} : e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta\mathsf{E}}$ が定義される必

要がある．この写像は λ_F が整数のときのみ定義される．このとき，(6.24) より，U は

$$\mathsf{U}(e^{i\theta})\mathsf{W}(\sqrt{\lambda_Z}\zeta)\mathsf{U}(e^{i\theta})^{-1} = \mathsf{W}(e^{i\theta}\sqrt{\lambda_Z}\zeta) \tag{6.25}$$

を満たす．この式は 2.3 節で与えられた条件 (2.26) である．したがって，2.3 節の議論に基づいて，半直積群である拡大 1 自由度 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ のユニタリ表現が得られる．このユニタリ表現を拡大 Heisenberg 表現とよぶ．ここで，$\zeta = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$ とすると，(6.25) は以下と同値となる．

$$\begin{aligned}&\mathsf{U}(e^{i\theta})\mathsf{W}(\sqrt{\lambda_Z}x, \sqrt{\lambda_Z}y)\mathsf{U}(e^{i\theta})^{-1}\\&\quad = \mathsf{W}(\cos\theta\sqrt{\lambda_Z}x - \sin\theta\sqrt{\lambda_Z}y, \sin\theta\sqrt{\lambda_Z}x + \cos\theta\sqrt{\lambda_Z}y)\end{aligned}$$

したがって，$\lambda_F \in \mathbb{R}$ が Lie 環 $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1)$ の既約歪エルミート表現 $\mathsf{f}_{\lambda_Z,\lambda_F}$ を与えるとき，その表現が Lie 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ の既約ユニタリ表現に拡張できるための必要十分条件は λ_F が整数であることである．さらに，U(1) の二重被覆 $\check{\mathrm{U}(1)}$（U(1) と同型であるが）を用いると，Lie 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ の二重被覆群が Lie 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \check{\mathrm{U}(1)}$ で与えられる．Lie 環 $\mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1)$ の既約歪エルミート表現 f_{λ_F} が Lie 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ の既約ユニタリ表現に拡張できないが，二重被覆群の既約ユニタリ表現に拡張できるための必要十分条件は，λ_F が半整数（$2\lambda_F$ は整数であるが，λ_F は整数でないもの）となることである．

さらに，表現 $\mathsf{f}_{\lambda_Z,\lambda_F}$ における 5.10 節で与えたコヒーレントベクトルは (6.14) で与えた $|\sqrt{\lambda_Z}\zeta\rangle$ に一致する．したがって，$\lambda_Z \frac{dxdy}{2\pi}$ を規格化された測度としたとき，変数変換に注意して (6.15) を用いると，表現空間 $\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F}$ の形式的次元は λ_Z となる．

また，(6.25) において，複素変数 ζ について微分すると，$\mathsf{U}(e^{i\eta})\mathsf{a}\mathsf{U}(e^{i\eta})^{-1} = e^{-i\eta}\mathsf{a}$ を得る．この条件は

$$\mathsf{U}(e^{i\eta})\mathsf{Q}\mathsf{U}(e^{i\eta})^{-1} = \cos\eta\mathsf{Q} + \sin\eta\mathsf{P},\ \mathsf{U}(e^{i\eta})\mathsf{P}\mathsf{U}(e^{i\eta})^{-1} = -\sin\eta\mathsf{Q} + \cos\eta\mathsf{P}$$

と同値である．例えば，$\mathbb{R}$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}\mathsf{Q}\mathcal{F}^{-1} = \mathsf{P}, \mathcal{F}\mathsf{P}\mathcal{F}^{-1} = -\mathsf{Q}$ を満たすので，$\mathbb{R}$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は $\mathsf{U}(e^{i\pi/2})$ に等しい．そして，表現空

間 $\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F}$ と $\mathcal{U}_{\lambda'_Z,\lambda'_F}$ のテンソル積空間 $\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F} \otimes \mathcal{U}_{\lambda'_Z,\lambda'_F}$ は以下のように既約分解できる.

$$\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F} \otimes \mathcal{U}_{\lambda'_Z,\lambda'_F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{\lambda_Z+\lambda'_Z,\lambda_F+\lambda'_F-n}. \tag{6.26}$$

この事実は, ウェイト $(\lambda_Z + \lambda'_Z, \lambda_F + \lambda'_F - n)$ を持つベクトルの数が n 個であることに注目するとわかりやすい. 一般に, 表現空間 $\mathcal{U}_{\lambda_Z+\lambda'_Z,\lambda_F+\lambda'_F-n}$ において, 存在するウェイトは $(\lambda_Z + \lambda'_Z, \lambda_F + \lambda'_F - m)$ である. ただし, m は $m \ge n$ となる整数である. そして, それぞれのウェイトに対応するベクトルは1つである. この事実から, (6.26) が確認できる.

6.2 多モードのBose粒子系

6.2.1 多自由度の量子系

本節では, 多モードのBose粒子系を扱うが, 最初に, これと数学的に同じ構造を持つ多自由度の量子系を扱う. これは, r 次元空間 $\mathbb{R}^r$ 上の粒子の位置に関する量子系で, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ への関数で, 自乗可積分なものの集合 $L^2(\mathbb{R}^r)$ で与えられる. この空間は $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r}$ と同型である. この系では, 位置を与える物理量は以下の掛け算作用素 Q_j で与えられる.

$$(\mathsf{Q}_j f)(x) := x_j f(x). \tag{6.27}$$

一方, 運動量を与える作用素は以下の作用素 P_j で与えられる.

$$(\mathsf{P}_j f)(x) := -i\frac{\partial}{\partial x_j} f(x). \tag{6.28}$$

$\mathsf{Q}_j, \mathsf{P}_j$ はともに, 自己共役作用素である [30]. $\mathsf{Q}_j, \mathsf{P}_j$ は条件 $\mathsf{Q}_j^\dagger = \mathsf{Q}_j, \mathsf{P}_j^\dagger = \mathsf{P}_j$ を満たすため, 自己共役作用素になる [30]. そして, この作用素は以下の交換関係を満たす.

$$[\mathsf{Q}_j, \mathsf{P}_{j'}] = i\delta_{j,j'} I,\ [\mathsf{P}_j, \mathsf{P}_{j'}] = [\mathsf{Q}_j, \mathsf{Q}_{j'}] = 0. \tag{6.29}$$

したがって,

$$\mathsf{f}(P_j) = i\sqrt{\lambda}\mathsf{P}_j,\ \mathsf{f}(Q_j) = i\sqrt{\lambda}\mathsf{Q}_j,\ \mathsf{f}(Z) = i\lambda I \tag{6.30}$$

とすると，f は $\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})$ の歪エルミート表現となる．この表現は既約表現になり，任意の $\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})$ の既約歪エルミート表現は上記の表現に限られることが知られている．

6.2.2 多モードのBose粒子系と多自由度系との関係

次に，ここの粒子が複数の種類の状態をとり得る場合でのBose粒子系を扱う．そのような量子系は多モードの量子系とよばれる．例えば，単一の振動数の光子からなる量子系でも，複数の経路について扱う場合，多モードの量子系となる．r 本の経路を扱う場合，r モードのBose粒子系となり，その表現空間は $(\ell^2)^{\otimes r}$ で与えられる．したがって，j 番目のモードの粒子の数が n_j である状態ベクトル $|n_1,\ldots,n_r\rangle$ が $(\ell^2)^{\otimes r}$ の正規直交基底となる．j 番目のモードについての消滅作用素 a_j は

$$\mathsf{a}_j|n_1,\ldots,n_j,\ldots,n_r\rangle := \sqrt{n_j}|n_1,\ldots,n_j-1,\ldots,n_r\rangle$$

によって定義され，その共役作用素である生成作用素 $\mathsf{a}_j^\dagger$ は

$$\mathsf{a}_j^\dagger|n_1,\ldots,n_j,\ldots,n_r\rangle := \sqrt{n_j+1}|n_1,\ldots,n_j+1,\ldots,n_r\rangle$$

を満たす．したがって，交換関係

$$[\mathsf{a}_j,\mathsf{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}I \tag{6.31}$$

が成り立つ．そして，作用素 $\mathsf{N}_j := \mathsf{a}_j^\dagger\mathsf{a}_j$ の和 $\mathsf{N} = \mathsf{N}_1 + \cdots + \mathsf{N}_r$ は全てのモードの粒子数を与える作用素となる．

以下，1モードの場合と同じように，エルミート関数を用いて，$(\ell^2)^{\otimes r}$ を $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r}$ や $L^2(\mathbb{R}^r)$ と同じ空間と見なす．すると，関係式 $\mathsf{Q}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{a}_j + \mathsf{a}_j^\dagger)$, $\mathsf{P}_j = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathsf{a}_j - \mathsf{a}_j^\dagger)$ および $\mathsf{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{Q}_j + i\mathsf{P}_j)$, $\mathsf{a}_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{Q}_j - i\mathsf{P}_j)$ を得る．

次に，(6.30) で与えたLie 環 $\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})$ の既約歪エルミート表現からLie 群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現を具体的に与えよう．$2r$ 次元の実数値ベクトル $\vec{z} := (q_1,\ldots,q_r,p_1,\ldots,p_r)^T$ と $2r$ 次元の作用素を成分に持つベクトル $\vec{\mathsf{R}} := (\mathsf{Q}_1,\ldots,\mathsf{Q}_r,\mathsf{P}_1,\ldots,\mathsf{P}_r)^T$ を用いると，$\sum_{j=1}^r p_j\mathsf{Q}_j - q_j\mathsf{P}_j = (\vec{z}, J_r\vec{\mathsf{R}})$ が成り立つ．$\zeta_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j + ip_j)$ と置き，Hausdorff の公式 (6.7) を用いると，

$\mathsf{W}^r(\zeta) := \mathsf{f}(\exp(\sum_{j=1}^r p_j Q_j - q_j P_j))$ 交換関係 (6.31) から関係式

$$\mathsf{W}^r(\zeta) = \exp\left(\sum_{j=1}^r \zeta_j \mathsf{a}_j^\dagger - \overline{\zeta}_j \mathsf{a}_j\right)$$

$$= e^{-\frac{\|\zeta\|^2}{2}} \exp\left(\sum_{j=1}^r \zeta_j \mathsf{a}_j^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^r \overline{\zeta}_j \mathsf{a}_j\right) \tag{6.32}$$

$$\mathsf{W}^r(\sqrt{\lambda}\zeta)\mathsf{W}^r(\sqrt{\lambda}\zeta') = e^{\frac{-1}{2}(\lambda \sum_{j=1}^r \zeta_j \overline{\zeta'}_j + \zeta'_j \overline{\zeta}_j)} \mathsf{W}^r(\sqrt{\lambda}(\zeta + \zeta'))$$

を満たす．なお，$\mathsf{W}^r(\zeta)$ は $\vec{z} = (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ を引数にとるとき，$\vec{\mathsf{R}}$ を $2r$ 個の Lie 環の要素を成分に持つベクトル $(\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_r, \mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_r)^T$ とすると，$\exp(i(\vec{z}, J_r \vec{\mathsf{R}}))$ と一致し，$\mathsf{W}^r(\vec{z})$ と記すことにする．$\exp(i(\vec{z}, J_r \vec{\mathsf{R}}) + \theta)$ を $\mathsf{W}^r(\vec{z}, \theta)$ と記すことにすると，$\mathsf{W}^r(\sqrt{\lambda}\vec{z}, \lambda\theta)$ は $\mathrm{H}(2r, \mathbb{R})$ の表現を与えることになる．

$\lambda = 1$ となる表現の下でのコヒーレントベクトル $|\zeta\rangle := |\zeta_1, \ldots, \zeta_r\rangle := e^{-\frac{\|\zeta\|^2}{2}} \exp(\sum_{j=1}^r \zeta_j \mathsf{a}_j^\dagger)|0, \ldots, 0\rangle$ を以下のように定義する．(6.32) より，$|\zeta\rangle = \mathsf{W}^r(\zeta)|0, \ldots, 0\rangle$ となり，コヒーレントベクトルはユニタリ表現の作用を用いて表すことができる．そして，(6.15) と同様に，

$$\int_{\mathbb{C}^r} |\zeta\rangle\langle\zeta| \frac{dx_1 \cdots dx_r dy_1 \cdots dy_r}{(2\pi)^r} = I \tag{6.33}$$

が成り立つ．

6.3 ユニタリ群 U(r) による変換

6.3.1 ビームスプリッターによる相関

量子光学では，複数の光の経路からなる多モードの量子系で，ビームスプリッターとよばれる光学素子が知られている．ビームスプリッターによる時間発展を記述するユニタリ作用素は $g \in \mathrm{U}(r)$ の表現 $\mathsf{U}(g)$ で以下を満たすものとして与えられる．

$$\mathsf{U}(g)\mathsf{a}_j\mathsf{U}(g)^{-1} = \sum_{j'} (g^\dagger)_{j,j'} \mathsf{a}_{j'}. \tag{6.34}$$

したがって，行列 $g \in \mathrm{U}(r)$ を実部と虚部に $g = g_1 + ig_2$ と分解（g_1, g_2 は実数値行列）すると，$\tilde{\kappa}(g) := g_1 \otimes I_2 + g_2 \otimes J \in \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{R})$ が定義できる．この写像を用いると，g は作用素からなる $2r$ 次元のベクトル $\vec{\mathsf{R}}$ に以下のように作用する．

$$\mathsf{U}(g)\vec{\mathsf{R}}\mathsf{U}(g)^{-1} = \tilde{\kappa}(g)^{-1}\vec{\mathsf{R}}. \tag{6.35}$$

この変換をユニタリ作用素 $\mathsf{W}^r(\zeta)$ について考えると，

$$\mathsf{U}(g)\mathsf{W}^r(\zeta)\mathsf{U}(g)^{-1} = \mathsf{W}^r(g\zeta) \tag{6.36}$$

を得る. ここで $\zeta_j = \frac{x_j + iy_j}{\sqrt{2}}$ とすると，(6.36) は $\mathsf{U}(g)\mathsf{W}^r(\vec{z})\mathsf{U}(g)^{-1} = \mathsf{W}^r(\tilde{\kappa}(g)\vec{z})$ と同値である．

以下，(6.34) を満たす $\mathfrak{u}(r)$ の表現を具体的に与える．(6.34) の微分を考えると，$X \in \mathfrak{u}(r)$ について，

$$[\mathsf{U}(X), \mathsf{a}_j] = \sum_{l=1}^{r} -X_{j,l}\mathsf{a}_l \tag{6.37}$$

が成り立ち，(6.35) の微分を考えると，$[\mathsf{U}(X), \vec{\mathsf{R}}] = -\tilde{\kappa}(X)\vec{\mathsf{R}}$ が成り立つ．したがって，4.3 節にならって，$\mathsf{E}_j := i\mathsf{U}(-i|j\rangle\langle j|)$ および $\mathsf{K}_{j,l;\pm} := -i\mathsf{U}(F^x_{j,l}) \mp \mathfrak{su}(F^y_{j,l})$ を定義すると，これらは $[\mathsf{E}_j, \mathsf{a}_l] = \delta_{j,l}\mathsf{a}_l$, $[\mathsf{K}_{j,l;+}, \mathsf{a}_{j'}] = -\delta_{j,j'}\mathsf{a}_l$, $[\mathsf{K}_{j,l;-}, \mathsf{a}_{j'}] = -\delta_{j',l}\mathsf{a}_j$ を満たす．さらに，$\mathfrak{u}(r)$ の性質から，

$$[\mathsf{E}_{j'}, \mathsf{E}_j] = 0,\ [-\mathsf{E}_{j'} + \mathsf{E}_{j'+1}, \mathsf{K}_{j,l;\pm}] = \pm\boldsymbol{\alpha}_{j,l}(F^z_{j',j'+1})\mathsf{K}_{j,l;\pm},$$
$$[\mathsf{K}_{j,l;+}, \mathsf{K}_{j,l;-}] = -\mathsf{E}_j\mathsf{E}_l$$

が成り立つ．よって，$\mathsf{E}_j = -\mathsf{a}_j^\dagger\mathsf{a}_j + \lambda_F I$, $\mathsf{K}_{j,l;+} = \mathsf{a}_j^\dagger\mathsf{a}_l$, $\mathsf{K}_{j,l;-} = \mathsf{a}_l^\dagger\mathsf{a}_j$ を得る．よって，$\mathfrak{u}(r)$ の歪エルミート表現が得られた．

ここで，半直積 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}(2r, \mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(r)$ に関して，条件 (6.37) は条件 (3.42) に相当する．したがって，上記の $\mathfrak{u}(r)$ の表現と，先に与えた $\mathfrak{h}(2r, \mathbb{R})$ の表現についての Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}(2r, \mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(r)$ の半直積表現 f が与えられる．

そして，部分群 $\mathrm{U}(r)$ の表現に注目すると，表現空間 $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r}$ の既約分解

$$L^2(\mathbb{R})^{\otimes r} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}_{s,n} \tag{6.38}$$

を得る．ここで，$\mathcal{U}_{s,n}$ は $\{|n_1,\ldots,n_r\rangle\}_{n_1+\cdots+n_r=n}$ で生成される空間であり，$\mathrm{SU}(r)$ の作用に関して，$\mathbb{C}^r$ の n 次の対称テンソル積空間と同型である．よって，任意の $g\in\mathrm{U}(r)$ に対して，$\mathsf{U}(g)\mathsf{N}\mathsf{U}(g)^{-1}=\mathsf{N}$ が成り立つ．

このように，相互作用を記述するハミルトニアンが生成演算子と消滅演算子の積 $\mathsf{a}_j\mathsf{a}_{j'}^\dagger$ の和で与えられるとき，時間発展は $\mathfrak{u}(r)$ の作用で記述できる．また，作用素 $I,\mathsf{Q}_1,\ldots,\mathsf{Q}_r,\mathsf{P}_1,\ldots,\mathsf{P}_r,\mathsf{N}$ を $\mathsf{U}(g)$ と $\mathsf{U}(g)^{-1}$ を両側から作用させると，変換後の作用素はこれらの作用素の線型和で与えられる．このように，$\mathsf{U}(g)$ はこれらの作用素を線型に変換させるので，$\mathsf{U}(g)$ は線型な変化とよばれる．また，生成演算子と消滅演算子の積 $\mathsf{a}_j\mathsf{a}_{j'}^\dagger$ の和で与えられる相互作用は線型な相互作用とよばれる．

$g\in\mathrm{O}(r)\subset\mathrm{U}(r)$ の場合，$L^2(\mathbb{R})^{\otimes r}$ を n 変数の二乗可積分関数の空間 $L^2(\mathbb{R}^r)$ として捉えた場合，$Q_1,\ldots,Q_r$ の変換性に注意すると，$\mathsf{U}(g)$ の特徴付けとして，$(\mathsf{U}(g)f)(x)=f(gx)$ を得る．例えば，2 つの光の経路に対して，ガラス板などを使ってできるビームスプリッターとよばれるものを用いると，2 つの経路の相互作用が $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathrm{SU}(2)$ で記述される場合，図 6.1 のようにコヒーレントベクトルは変化する．

特に，$b_\eta:=\begin{pmatrix} \sqrt{1-\eta} & \sqrt{\eta} \\ -\sqrt{\eta} & \sqrt{1-\eta} \end{pmatrix}\in\mathrm{SU}(2)$ で記述されるビームスプリッターを系 1 から系 2 への**透過率** η のビームスプリッターという．特に，$\mathsf{U}(b_{1/2})$

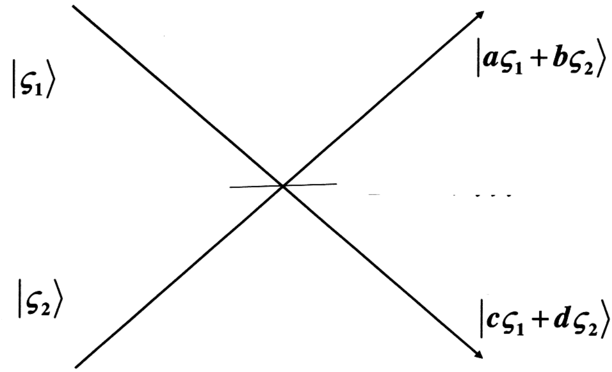


図 6.1　ビームスプリッター

を $\mathsf{U}_{1,2}$ と記す．同じようにして，$\mathsf{U}_{k,j}$ を定義する．透過率 η のビームスプリッターを用いて，

$$\mathrm{Att}_\eta(\rho) := \mathrm{Tr}_2\, \mathsf{U}(b_\eta)\rho \otimes |0\rangle\langle 0|\mathsf{U}(b_\eta)^\dagger$$

で与えられる量子通信路 Att_η は透過率 $1-\eta$ の**減衰通信路**とよばれる．

また，熱雑音とよばれる雑音過程は以下を満たす TP-CP 写像 Λ_N で与えられる．

$$\Lambda_N(|\zeta\rangle\langle\zeta|) = \int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\frac{|\alpha-\zeta|^2}{N}} \frac{dxdy}{2\pi N}. \tag{6.39}$$

任意の状態が P 関数で与えられることから，(6.39) は TP-CP 写像を一意に定める．Λ_N は

$$\Lambda_N(\rho) = \lim_{\eta\to+0} \mathrm{Tr}_2\, \mathsf{U}(b_\eta)\rho \otimes \rho_{N/\eta}\mathsf{U}(b_\eta)^\dagger \tag{6.40}$$

を満たすため，極めて大きな系 2 との小さい相互作用と見なすことができる．一般に，この大きな系 2 は環境系とよばれる．

系 1 の状態を ρ におき，系 2 の状態を真空状態 $|0\rangle\langle 0|$ におき，透過率 $\frac{1}{2}$ のビームスプリッターを通し，系 1 では Q の測定 F_{Q} を，系 2 では P の測定 F_{P} をそれぞれ行い，それぞれの測定値を x, y とする．測定値を $\alpha = x+iy$ とすると，この測定は系 1 に対するヘテロダイン測定 $\{|\alpha\rangle\langle\alpha|\}$ に一致する．この事実を示すには，2 つの測定の任意の次数の項 $\alpha^n\overline{\alpha}^m = (x+iy)^n(x-iy)^m$ の期待値（モーメント）が一致することを確認すれば十分である．

ヘテロダイン測定 $\{|\alpha\rangle\langle\alpha|\}$ の場合，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \alpha^n\overline{\alpha}^m \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle dqdp &= \mathrm{Tr}\,\rho\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \mathsf{a}^n|\alpha\rangle\langle\alpha|(\mathsf{a}^\dagger)^m dqdp \\ &= \mathrm{Tr}\,\rho\mathsf{a}^n\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| dqdp(\mathsf{a}^\dagger)^m = \mathrm{Tr}\,\rho\mathsf{a}^n(\mathsf{a}^\dagger)^m\end{aligned}$$

となり，透過率 $\frac{1}{2}$ のビームスプリッターを通した場合，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,\mathsf{U}(b_{\frac{1}{2}})\rho\otimes|0\rangle\langle 0|\mathsf{U}(b_{\frac{1}{2}})^\dagger(\mathsf{Q}_1+i\mathsf{P}_2)^n(\mathsf{Q}_1-i\mathsf{P}_2)^m \\ &= \mathrm{Tr}\,\rho\otimes|0\rangle\langle 0|(\mathsf{U}_{1,2}^\dagger(\mathsf{Q}_1+i\mathsf{P}_2)\mathsf{U}_{1,2})^n(\mathsf{U}_{1,2}^\dagger(\mathsf{Q}_1-i\mathsf{P}_2)\mathsf{U}_{1,2})^m\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Tr}\,\rho \otimes |0\rangle\langle 0| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{Q}_1 + \mathsf{Q}_2) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2)\right)^n$$
$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{Q}_1 + \mathsf{Q}_2) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathsf{P}_1 - \mathsf{P}_2)\right)^m$$
$$= \mathrm{Tr}\,\rho \otimes |0\rangle\langle 0|(\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2^\dagger)^n(\mathsf{a}_1^\dagger + \mathsf{a}_2)^m = \mathrm{Tr}\,\rho \mathsf{a}^n(\mathsf{a}^\dagger)^m \tag{6.41}$$

となる．よって，透過率 $\frac{1}{2}$ のビームスプリッターを通すことで，ヘテロダイン測定が構成できる．なお，最後の等式は $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ の場合は以下のように示せる．また，任意の密度行列は純粋状態の和で書けるので，この場合を示せば十分である．

$$(\mathsf{a}_1^\dagger + \mathsf{a}_2)^m|\phi\rangle \otimes |0\rangle = (\mathsf{a}_1^\dagger + \mathsf{a}_2)^{m-1}(\mathsf{a}_1^\dagger|\phi\rangle) \otimes |0\rangle = ((\mathsf{a}_1^\dagger)^m|\phi\rangle) \otimes |0\rangle.$$

同様に，$((\langle\phi| \otimes \langle 0|)(\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2^\dagger)^n = (\langle\phi|\mathsf{a}_1^n) \otimes \langle 0|$ となり，(6.41) を得る．

演習問題 18　(6.40) を示せ．

6.3.2 既約分解に対応する変換

(6.26) で与えた 1 モードの Bose 粒子系を表す群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ の既約分解に対応する変換が上記のビームスプリッターにより構成できる．最初に，1 モードの Bose 粒子系を表す群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ の 2 つの表現空間 $\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F}$, $\mathcal{U}_{0,0}$ が与えられた場合を考えよう．このとき，これらの空間は $L^2(\mathbb{R})$ と同型であり，それらの生成作用素を a_1, a_2 とする．2 つ目の空間には，$\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ は全く働かず，$\mathfrak{u}(1)$ の生成元 F の表現 $-i\mathsf{f}(F) = -\mathsf{a}_2^\dagger\mathsf{a}_2$ が同じように与えられる．この場合，以下のように既約分解できる．

$$\mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F} \otimes \mathcal{U}_{0,0} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}) \otimes |n\rangle = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{\lambda_Z,\lambda_F - n} \tag{6.42}$$

1 モードの Bose 粒子系を表す群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(1)$ の 2 つの表現空間 $\mathcal{U}_{\lambda_{Z,1},\lambda_{F,1}}$, $\mathcal{U}_{\lambda_{Z,2},\lambda_{F,2}}$ が与えられた場合についても，以下に述べるように，ビームスプリッターによる変換を施すと，上記の単純な場合に帰着できる．このとき，2 モードの Bose 粒子系となる合成系 $\mathcal{U}_{\lambda_{Z,1},\lambda_{F,1}} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_{Z,2},\lambda_{F,2}}$ でのテンソル積表現は

$$-i\mathsf{f}(F) = -(\mathsf{a}_1^\dagger\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2^\dagger\mathsf{a}_2) + \lambda_{F,1} + \lambda_{F,2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-i\mathsf{f}(Q)+\mathsf{f}(P)) = \sqrt{\lambda_{Z,1}}\mathsf{a}_1 + \sqrt{\lambda_{Z,2}}\mathsf{a}_2,$$

$$-i\mathsf{f}(Z) = (\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2})I$$

で与えられる．ここで，$g_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\lambda_{Z,1}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}} & -\sqrt{\frac{\lambda_{Z,2}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}} \\ \sqrt{\frac{\lambda_{Z,2}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}} & \sqrt{\frac{\lambda_{Z,1}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}} \end{pmatrix}$ とし，作用 $\mathsf{U}(g_0)$ を考えると，$\mathsf{U}(g_0)\mathsf{a}_1\mathsf{U}(g_0)^\dagger = \sqrt{\frac{\lambda_{Z,1}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}}\mathsf{a}_1 + \sqrt{\frac{\lambda_{Z,2}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}}\mathsf{a}_2$, $\mathsf{U}(g_0)\mathsf{a}_2\mathsf{U}(g_0)^\dagger = \sqrt{\frac{\lambda_{Z,2}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}}\mathsf{a}_1 - \sqrt{\frac{\lambda_{Z,1}}{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}}\mathsf{a}_2$ となり，

$$\mathsf{U}(g_0)(-i\mathsf{f}(F))\mathsf{U}(g_0)^\dagger = -\mathsf{a}_1^\dagger\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_2^\dagger\mathsf{a}_2 + \lambda_{F,1} + \lambda_{F,2},$$

$$\mathsf{U}(g_0)\frac{1}{\sqrt{2}}(-i\mathsf{f}(Q)+\mathsf{f}(P))\mathsf{U}(g_0)^\dagger = \sqrt{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2}}\mathsf{a}_1$$

$$\mathsf{U}(g_0)(-i\mathsf{f}(Z))\mathsf{U}(g_0)^\dagger = (\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2})I$$

を得る．すなわち，$\mathsf{U}(g_0)\mathcal{U}_{\lambda_{Z,1},\lambda_{F,1}} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_{Z,2},\lambda_{F,2}}\mathsf{U}(g_0)^\dagger$ の部分空間 $L^2(\mathbb{R})\otimes|n\rangle\langle n|$ は最大ウェイト $\lambda_{F,1}+\lambda_{F,2}-n$ の既約な表現空間となる．したがって，

$$\begin{aligned}\mathsf{U}(g_0)\mathcal{U}_{\lambda_{Z,1},\lambda_{F,1}} \otimes \mathcal{U}_{\lambda_{Z,2},\lambda_{F,2}}\mathsf{U}(g_0)^\dagger &= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}_{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2},\lambda_{F,1}+\lambda_{F,2}-n} \\ &= \mathcal{U}_{\lambda_{Z,1}+\lambda_{Z,2},\lambda_{F,1}+\lambda_{F,2}} \otimes \mathcal{U}_{0,0}\end{aligned}$$

を得る．

6.3.3　半直積群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(r)$ の表現とコヒーレント状態*

6.2節までの議論では，Heisenberg群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R})$ の固定化群のLie環が $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R})$ のLie環のコンパクト極大Cartan部分代数を含まない．これまでと同様のコヒーレント状態に対する特徴付けを得るには，より大きな群による表現を考える必要がある．そのために，半直積 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(r)$ によるユニタリ表現に注目する．このユニタリ表現を扱うために，対応するLie環 $\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(r)$ の歪エルミート表現を扱う．そのためには，Lie環 $\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(r)$ のルート系を定める必要がある．このLie環 の中心は Z で生成される1次元部分空間 $\mathfrak{c} := \mathbb{R}Z$ なので，$\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(r)/\mathfrak{c}$ に対して，ルート系を定める．そして，$\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})/\mathfrak{c}$ と同

型となる $\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})\rtimes\mathfrak{u}(r)$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 := < Q_1,\ldots,Q_r,P_1,\ldots,P_r > \rtimes\mathfrak{u}(r)$ に対して，ルート系を定める．

$\mathfrak{h}(2r,\mathbb{R})\rtimes\mathfrak{u}(r)$ のコンパクトな極大 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{d}(r)$ で与えられる．そして，$\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{g}_0\cap(\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{d}(r))$ は $\mathfrak{d}(r)$ と一致する．そして，$\mathfrak{d}(r)$ の双対空間 $\mathfrak{d}(r)^*$ の要素として，$\boldsymbol{\alpha}_{j,l},\boldsymbol{\alpha}_j\in\mathfrak{d}(r)^*$ を以下で与える．（ここでは，4.3 節で与えた $in^*(\boldsymbol{\alpha}_{j,l})$ を $\boldsymbol{\alpha}_{j,l}$ と記すことにする．）

$$\boldsymbol{\alpha}_{j,l}(X) := i(\langle j|X|j\rangle - \langle l|X|l\rangle),\ \boldsymbol{\alpha}_j(X) := i\langle j|X|j\rangle,\ \forall X\in\mathfrak{d}(r). \quad (6.43)$$

すると，$F^x_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}_j}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}_j}$ を $F^x_{j,l}, F^y_{j,l}, -\frac{Q_j}{\sqrt{2}}, -\frac{P_j}{\sqrt{2}}$ とすると，条件 (5.48) が成り立つことが確認できる．

このとき，$\mathfrak{h}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大コンパクト部分 Lie 環 $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{u}(r)$ である．すると，$\mathfrak{h}_0$ は $\mathfrak{d}(r)$ となる．$\mathfrak{k}$ の正のルートの集合 Φ_k^+ は $\{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1\le j<\le r}$ となり，$\Phi_\mathfrak{p}^+ = \Phi^+\setminus\Phi_\mathfrak{k}^+$ は $\{\boldsymbol{\alpha}_j\}_{j=1}^r$ となる．

6.3.1 項で与えた半直積表現 $\mathsf{W}\rtimes\mathsf{U}$ について $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}_j} = i(\mathsf{W}\rtimes\mathsf{U})(F^x_{\boldsymbol{\alpha}_j}) - (\mathsf{W}\rtimes\mathsf{U})(F^y_{\boldsymbol{\alpha}_j}) = \mathsf{a}_j$, $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}_j} = i(\mathsf{W}\rtimes\mathsf{U})(F^x_{\boldsymbol{\alpha}_j}) + (\mathsf{W}\rtimes\mathsf{U})(F^y_{\boldsymbol{\alpha}_j}) = \mathsf{a}_j^\dagger$, $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}} = \mathsf{K}_{j,l;+} = \mathsf{a}_j^\dagger\mathsf{a}_l$, $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}_{j,l}} = \mathsf{K}_{j,l;-} = \mathsf{a}_l^\dagger\mathsf{a}_j$ を得る．ここで，$\boldsymbol{v} := \sum_{j=1}^r\boldsymbol{\alpha}_j\in\mathfrak{h}_0^*$ とおくと，

$$\boldsymbol{v}(\sum_{j=0}^r c_jF_j^{z,u}) = \sum_{j=0}^r c_j \quad (6.44)$$

を得る．よって，任意の $\boldsymbol{\alpha}\in\Phi^+$ について，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}|0,\ldots,0\rangle = 0$ となることから，$|0,\ldots,0\rangle$ が最大ウェイトベクトルとなる．さらに，(6.44) より，

$$-i\mathsf{f}(\sum_{j=0}^r c_jF_j^{z,u})|0,\ldots,0\rangle = \sum_{j=0}^r c_j(-\mathsf{a}_j^\dagger\mathsf{a}_j + \lambda_F)|0,\ldots,0\rangle$$

$$= \lambda_F\sum_{j=0}^r c_j|0,\ldots,0\rangle = \lambda_F\boldsymbol{v}(\sum_{j=0}^r c_jF_j^{z,u})|0,\ldots,0\rangle$$

となる．このとき，最大ウェイトは $(1,\lambda_F\boldsymbol{v})\in(\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{d}(r))^*$ となる．この表現空間を $\mathcal{U}_{1,\lambda_F\boldsymbol{v}}$ と記すことにする．

SU(r) は普遍被覆群であるので任意の実数 λ_F について，部分群 $G = \mathrm{H}(2r,\mathbb{R})\rtimes\mathrm{SU}(r)$ の表現が得られる．$\mathrm{U}(r) = \mathrm{SU}(r)\times\mathrm{U}(1)$ と分解できるが，

U(1) の作用が定義されるためには，λ_F が整数である必要がある．そのため，群 $G = \mathrm{H}(2r,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{U}(r)$ の表現に拡張が可能であるための必要十分条件は λ_F が整数であることとなる．λ_F が半整数のときは，$\mathrm{U}(r)$ の二重被覆 $\check{\mathrm{U}(r)}$ を考え，群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{R}) \rtimes \tilde{\mathrm{U}(r)}$ のユニタリ表現に拡張できる．

最大ウェイト状態 $|0,\ldots,0\rangle\langle 0,\ldots,0|$ についての固定化群 H の Lie 環は $\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{u}(r)$ となる．5.10節の議論にしたがってコヒーレントベクトルを構成すると，コヒーレントベクトルは $|\zeta\rangle$ に一致する．パラメータ空間 G/H は $\mathbb{C}^r$ に一致し，正規化された $\mathbb{C}^r$ の不変測度は $\mu_{\mathbb{C}}(d\zeta) = \frac{dq_1\cdots dq_r dp_1\cdots dp_r}{(2\pi)^r}$ となる．よって，この表現の形式的次元は 1 であることがわかる．

特に，(5.19) が非コンパクト群の表現でも成り立つことから，$g = e^X \in \mathrm{U}(r)$ の表現を $\mathsf{U}(g)$ で表すと，

$$
\begin{aligned}
\mathsf{U}(g)|0,\ldots,0\rangle &= e^{i\lambda_F \boldsymbol{v}(X)}|0,\ldots,0\rangle \\
&= e^{i\lambda_F \cdot i \operatorname{Tr} X}|0,\ldots,0\rangle = (\det g)^{-\lambda_F}|0,\ldots,0\rangle
\end{aligned}
$$

を得る．したがって，$g \in \mathrm{U}(r)$ はコヒーレントベクトル $|\zeta\rangle$ には以下のように作用する．

$$
\begin{aligned}
\mathsf{U}(g)|\zeta\rangle &= \mathsf{U}(g)\mathsf{W}^r(\zeta)|0\rangle = \mathsf{W}^r(g\zeta)\mathsf{U}(g)|0\rangle \\
&= \mathsf{W}^r(g\zeta)(\det g)^{-\lambda_F}|0\rangle = (\det g)^{-\lambda_F}|g\zeta\rangle.
\end{aligned}
$$

6.4　第二量子化とBose粒子

これまで述べた内容を基礎に，量子系の構造について説明する．量子系を扱うには，2段階の量子化のプロセスが必要となる．初めに粒子1つがとり得る自由度に関する量子系 $\mathcal{H}$ が与えられる．例えば，ある光の振動数および特定の偏光を指定し，平面波の複数の経路を考えれば，経路の数が次元となる量子系 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^r$ が決まり，その基底に対応する様相をモードとよぶ．その粒子がBose粒子とよばれる粒子の場合，同じ量子系に粒子が2つ以上存在することもある．しかも，同じ粒子なので2つの粒子を区別することはできない．このような状況では，各モードに粒子が何個存在するかしか区別できない．4.4.2項で述べたように，各モードに同時に複数の粒子が存在し得る場合は，Bose粒子とよばれ，各モードに同時に1つの粒子しか存在し得ない場合は，Fermi粒子と

よばれる．以下では，Bose 粒子の場合のみ扱う．Bose 粒子の場合，粒子の総数 n が確定している場合の量子系は $\mathcal{H}$ の n 次の対称テンソル積空間 $\mathcal{U}_{s,n}(\mathcal{H})$ で与えられることを 4.4.2 項では述べた．そのため，粒子の総数 n が全ての非負の整数をとり得る可能性を考慮すると，系は $L^2(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}_{s,n}(\mathcal{H})$ と書け，(6.38) で述べたように，$L^2(\mathbb{R})^{\otimes r}$ と一致する．1 粒子のなす量子系 $\mathcal{H}$ を考えることは第 1 量子化とよばれるのに対し，量子系 $\mathcal{H}$ 上の多粒子系 $L^2(\mathcal{H})$ を考えることを**第二量子化**とよぶ．この場合，$\mathcal{H}$ で座標変換 $g \in \mathrm{U}(r)$ を行うと，$L^2(\mathcal{H})$ では，その表現 $\mathsf{U}(g)$ による変換が施される．

1 粒子のとり得る系として系 $\mathcal{H}_A = \{|u_j\rangle\}$ と系 $\mathcal{H}_B = \{|v_j\rangle\}$ の系が与えられた場合を考える．この場合，1 粒子のとり得る全系は $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ となる．この粒子が Bose 粒子の場合，2 個以上の粒子の存在を考えると，量子系は $L^2(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}_{s,n}(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)$ で与えられる．$\mathcal{U}_{s,2}(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)$ は対称テンソル積空間であるので，その要素は $(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)^{\otimes 2}$ 上の対称化されたベクトルで表されることに注意しよう．

ここで，系 $\mathcal{H}_A$ と系 $\mathcal{H}_B$ のそれぞれに，1 粒子が存在する場合を考える．この場合，合計の粒子の数は 2 であり，そのような系の状態は対称テンソル積空間 $\mathcal{U}_{s,2}(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)$ に含まれる．例えば，系 $\mathcal{H}_A$ の状態が $|u_{j_1}\rangle$ であり，系 $\mathcal{H}_B$ の状態が $|v_{j_2}\rangle$ である状態は，$\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_{j_1}, v_{j_2}\rangle + |v_{j_2}, u_{j_1}\rangle) \in \mathcal{U}_{s,2}(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)$ で与えられる．このような要素で生成される部分空間はテンソル積空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ と同型である．このように，$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ を $\mathcal{U}_{s,2}(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)$ の部分空間として見なすことができる．すなわち，$L^2(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)$ の部分空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ に射影することでテンソル積空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ が実現できる．

事実，現実に系 $\mathcal{H}_A$ と系 $\mathcal{H}_B$ の合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ を実現するには，この方法を用いていることが多い．系 $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ についての Bose 粒子であっても，様々な制約や人工的に設けられた実験室の環境から，系 $\mathcal{H}_A$ と系 $\mathcal{H}_B$ のそれぞれに，1 粒子が存在すると考えることができ，実際の量子系は $\mathcal{U}_{s,2}(\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B)$ ではなく，その部分空間である $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ と見なせることが多い．

なお，系 $\mathcal{H}_A$ および系 $\mathcal{H}_B$ が $\mathcal{H}$ と（数学的に）同型の場合，$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ を $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ と記すが，両者が物理的に同一の系であることを意味しているわけではない．物理的に同一の系に 2 つの粒子がある場合は，Bose 粒子であれば系は $\mathcal{U}_{s,2}(\mathcal{H})$ となる．

同様に，n 個の系 $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ に Bose 粒子に従う粒子がそれぞれ 1 個ずつ

ある場合，$\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ は n 次の対称テンソル積空間 $\mathcal{U}_{s,n}(\mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n)$ の部分空間として実現される．すなわち，4.4.1 項で述べた識別可能な場合は，n 個の系 $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ が数学的に同型であっても，物理的に異なる量子系である場合に，実現可能となる．なお，ここでの議論は，対称化した部分を反対称化に置き換えれば，Fermi 粒子でも成り立つ．

6.5　1モードのスクイズド状態

3.1.2 項では，Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R})$ の積を保存する群として，シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ を導入した．シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ は解析力学での正準変換に対応しているので，量子系でも正準変換に対応する変換として，シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の表現が存在すると期待できる．しかも，そのような $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ の射影的ユニタリ表現 f は

$$\mathsf{f}(g)\mathsf{W}(q,p,\theta)\mathsf{f}(g)^{-1} = \mathsf{W}(g(q,p,\theta)) \tag{6.45}$$

を満たすことが要請される．このような条件を満たす射影的ユニタリ表現を与えることと W を拡大する形で，半直積 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{SU}(1,1)$ の射影的ユニタリ表現を与えることは同値である．

そこで，上の式を微分することで以下の条件を得る．

$$\begin{pmatrix} \mathsf{f}(g)\mathsf{Q}\mathsf{f}(g)^{-1} \\ \mathsf{f}(g)\mathsf{P}\mathsf{f}(g)^{-1} \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{Q} \\ \mathsf{P} \end{pmatrix}. \tag{6.46}$$

ここで，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ と一致し，(4.5) で与えた写像 κ を通じて，$\mathrm{SU}(1,1)$ と同型であることに注意しよう．すると，$\mathrm{SU}(1,1)$ の射影的ユニタリ表現 S を $g \in \mathrm{SU}(1,1)$ に対して，$\mathsf{S}(g) := \mathsf{f}(\kappa(g))$ を考えると，条件 (6.46) は以下と同値である．

$$\begin{pmatrix} \mathsf{S}(g)\mathsf{Q}\mathsf{S}(g)^{-1} \\ \mathsf{S}(g)\mathsf{P}\mathsf{S}(g)^{-1} \end{pmatrix} = \kappa(g)^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{Q} \\ \mathsf{P} \end{pmatrix}. \tag{6.47}$$

この条件は，生成消滅作用素 $\mathsf{a}, \mathsf{a}^\dagger$ に対する作用として表すと以下のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \mathsf{S}(g)\mathsf{a}\mathsf{S}(g)^{-1} \\ \mathsf{S}(g)\mathsf{a}^\dagger\mathsf{S}(g)^{-1} \end{pmatrix} = g^{-1}\begin{pmatrix} \mathsf{a} \\ \mathsf{a}^\dagger \end{pmatrix}. \tag{6.48}$$

なお，複素数 ζ に対する $g \in \mathrm{SU}(1,1)$ の作用 $g\zeta$ を (4.7) で定義されたものとすると，条件式 (6.45) は以下と同値である.

$$\mathsf{S}(g)\mathsf{W}(\zeta)\mathsf{S}(g)^{-1} = \mathsf{W}(g\zeta). \tag{6.49}$$

そして，(6.48) の微分を考えると，$X \in \mathfrak{su}(1,1)$ の要素に対して，

$$\begin{pmatrix} [\mathsf{S}(X), \mathsf{a}] \\ [\mathsf{S}(X), \mathsf{a}^\dagger] \end{pmatrix} = -X\begin{pmatrix} \mathsf{a} \\ \mathsf{a}^\dagger \end{pmatrix}$$

が成り立ち，(6.47) の微分を考えると，

$$\begin{pmatrix} [\mathsf{S}(X), \mathsf{Q}] \\ [\mathsf{S}(X), \mathsf{P}] \end{pmatrix} = -\kappa(X)\begin{pmatrix} \mathsf{Q} \\ \mathsf{P} \end{pmatrix} \tag{6.50}$$

が成り立つ．したがって，条件 (6.50) の下では，(4.8) で与えた $\mathsf{E}_{0,-1}$ $\mathsf{K}_{\pm,-1}$ は以下を満たすものに限られる.

$$[\mathsf{E}_{0,-1}, \mathsf{a}] = \frac{1}{2}\mathsf{a}, \quad [\mathsf{E}_{0,-1}, \mathsf{a}^\dagger] = \frac{1}{2}\mathsf{a}^\dagger$$

$$[\mathsf{K}_{+,-1}, \mathsf{a}] = 0, \quad [\mathsf{K}_{+,-1}, \mathsf{a}^\dagger] = \mathsf{a} \tag{6.51}$$

$$[\mathsf{K}_{-,-1}, \mathsf{a}] = -\mathsf{a}^\dagger, \quad [\mathsf{K}_{-,-1}, \mathsf{a}^\dagger] = 0. \tag{6.52}$$

(6.51), (6.52) より，$\mathsf{K}_{+,-1} = \frac{1}{2}\mathsf{a}^2$, $\mathsf{K}_{-,-1} = \frac{1}{2}(\mathsf{a}^\dagger)^2$ を得る．さらに，(4.9) の第 2 式より，$\mathsf{E}_{0,-1} = [\mathsf{K}_{+,-1}, \mathsf{K}_{-,-1}] = -\frac{1}{2}\mathsf{a}^\dagger\mathsf{a} - \frac{1}{4}$ を得る．よって，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の歪エルミート表現が得られた.

$\mathsf{E}_{0,-1}$ の形からウェイトベクトルは全て個数ベクトル $|n\rangle$ となる．最大ウェイトベクトルはウェイトが $-\frac{1}{4}$ となる真空状態ベクトル $|0\rangle$ である．しかし，真空状態ベクトル $|0\rangle$ を含む既約空間は偶数の個数ベクトル $\{|2n\rangle\}$ から生成される空間であり，この空間は偶関数のなす空間 $L^2_{\mathrm{even}}(\mathbb{R})$ と一致する．そのため，最大ウェイトが $-\frac{3}{4}$ となる最大ウェイトベクトル $|1\rangle$ を含む既約空間が

存在する．この空間は奇数の個数ベクトル $\{|2n+1\rangle\}$ から生成される空間であり，この空間は奇関数のなす空間 $L^2_{\mathrm{odd}}(\mathbb{R})$ と一致する．これらの $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の表現の最大ウェイトが $-\frac{1}{4}$ または $-\frac{3}{4}$ であり，この場合は，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の二重被覆群 $\mathrm{SL}(\check{2},\mathbb{R})$ のユニタリ表現がそれぞれ存在するので，2.4 節で述べたように，$L^2(\mathbb{R}) = L^2_{\mathrm{even}}(\mathbb{R}) \oplus L^2_{\mathrm{odd}}(\mathbb{R})$ での $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の射影表現が存在する．したがって，部分群の表現が条件 (6.45) を満たす群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の射影的ユニタリ表現も与えられる．

この事実を別な角度から見てみよう．この表現は $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{u}(1)$ の表現を含んでいる．$\mathsf{S}(F^z_{-1})$ が $\mathfrak{u}(1)$ の生成元の表現を与える．$\mathsf{E}_1 = 2i\mathsf{S}(F^z_{-1})$ となるが，前節の λ_F に対応する値が $\frac{1}{2}$ になる．そのため前節で与えた $\mathrm{U}(1)$ の部分の表現が決まらず，その二重被覆群 $\mathrm{U}(\check{1})$ のみの表現が定まる．この事実は，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の作用にも現れ，二重被覆群 $\mathrm{SL}(\check{2},\mathbb{R})$ の表現のみ定まる．

ここで，$\mathrm{SL}(\check{2},\mathbb{R})$ の作用によって，コヒーレントベクトルをスクイジングしたベクトルを定義しよう．$\zeta \in D$ に対して，**スクイズドベクトル** $|\zeta_2,\zeta_1\rangle := \exp(\frac{\zeta_2}{2}(\mathsf{a}^\dagger)^2 - \frac{\overline{\zeta_2}}{2}\mathsf{a}^2)|\zeta_1\rangle$ を定義する．特に，$\zeta_1 = 0$ の場合は $\mathrm{SL}(\check{2},\mathbb{R})$ の一般的なコヒーレントベクトルと一致し，$|\zeta_2,0\rangle = (1-|\zeta_2|^2)^{\frac{1}{4}}\exp(\frac{\zeta_2}{2}(\mathsf{a}^\dagger)^2)|0\rangle$ となる．

次に，スクイズドベクトルの場合，P, Q のばらつき度合いがどのようになるか調べる．$\Delta_{|\zeta_2,\zeta_1\rangle}[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]$ の成分についての一般の重み和を扱うために，$g \in \mathrm{SU}(1,1)$ について

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\kappa(g)^{-1})^T\kappa(g)^{-1}\Delta_{|\zeta_2,\zeta_1\rangle}[\mathsf{Q}:\mathsf{P}] \\
&\quad = \langle\zeta_2,\zeta_1|(\mathsf{Q}-qI,\mathsf{P}-pI)(\kappa(g)^{-1})^T\kappa(g)^{-1}\begin{pmatrix}\mathsf{Q}-qI\\ \mathsf{P}-pI\end{pmatrix}|\zeta_2,\zeta_1\rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つことに注意する．ここで，$\zeta_1 = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}$ とした．そして，$\mathsf{S}(g) = \exp(\frac{\zeta_2}{2}(\mathsf{a}^\dagger)^2 - \frac{\overline{\zeta_2}}{2}\mathsf{a}^2)$ とすると，

$$
\kappa(g)^{-1}\begin{pmatrix}\mathsf{Q}-qI\\ \mathsf{P}-pI\end{pmatrix}|\zeta_2,\zeta_1\rangle = \kappa(g)^{-1}\begin{pmatrix}\mathsf{Q}-qI\\ \mathsf{P}-pI\end{pmatrix}\mathsf{W}(g\zeta)\mathsf{S}(g)|0\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{W}(g\zeta)\kappa(g)^{-1}\left[\begin{pmatrix}\mathsf{Q}-qI\\ \mathsf{P}-pI\end{pmatrix}+\kappa(g)\begin{pmatrix}qI\\ pI\end{pmatrix}\right]\mathsf{S}(g)|0\rangle\\
&= \mathsf{W}(g\zeta)\mathsf{S}(g)\kappa(g)^{-1}\left[\kappa(g)\begin{pmatrix}\mathsf{Q}-qI\\ \mathsf{P}-pI\end{pmatrix}+\kappa(g)\begin{pmatrix}qI\\ pI\end{pmatrix}\right]|0\rangle\\
&= \mathsf{W}(g\zeta)\mathsf{S}(g)\begin{pmatrix}\mathsf{Q}\\ \mathsf{P}\end{pmatrix}|0\rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つことから，(6.19) より，

$$
\begin{aligned}
&\langle\zeta_2,\zeta_1|(\mathsf{Q}-qI,\mathsf{P}-pI)(\kappa(g)^{-1})^T\kappa(g)^{-1}\begin{pmatrix}\mathsf{Q}-qI\\ \mathsf{P}-pI\end{pmatrix}|\zeta_2,\zeta_1\rangle\\
&\quad = \langle 0|(\mathsf{Q},\mathsf{P})\mathsf{S}(g)^\dagger\mathsf{W}(g\zeta)^\dagger\mathsf{W}(g\zeta)\mathsf{S}(g)\begin{pmatrix}\mathsf{Q}\\ \mathsf{P}\end{pmatrix}|0\rangle = \langle 0|(\mathsf{Q},\mathsf{P})\begin{pmatrix}\mathsf{Q}\\ \mathsf{P}\end{pmatrix}|0\rangle = 1
\end{aligned}
$$

となり，$\mathrm{Tr}(\kappa(g)^{-1})^T\kappa(g)^{-1}\Delta_{|\zeta_2,\zeta_1\rangle}[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]=1$ を得る．$\kappa(g)\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ であるから，(6.17) より，一般の状態 ρ について

$$
\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\kappa(g)^{-1})^T\ \kappa(g)^{-1}\Delta_\rho[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]\ge\sqrt{\det(\kappa(g)^{-1})^T\kappa(g)^{-1}\Delta_\rho[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]}\ge\frac{1}{2}
$$

が成り立つ．$\rho=|\zeta_2,\zeta_1\rangle\langle\zeta_2,\zeta_1|$ のとき，等号が成り立つことから，等号成立条件より，$\mathrm{Tr}(\kappa(g)^{-1})^T\kappa(g)^{-1}\Delta_\rho[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]=\frac{1}{2}$, すなわち，$\Delta_{|\zeta_2,\zeta_1\rangle}[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]=\frac{1}{2}\kappa(g)\kappa(g)^T$ が成り立つ．

2×2 の狭義正定値対称行列は $g'\in\mathrm{SU}(1,1)$ を用いて，$(\kappa(g')^{-1})^T\kappa(g')^{-1}$ の定数倍で与えられる．したがって，重みを表す行列 $(\kappa(g')^{-1})^T\kappa(g')^{-1}$ に応じて，$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\kappa(g')^{-1})^T\kappa(g')^{-1}\Delta_\rho[\mathsf{Q}:\mathsf{P}]$ を最小にする ζ_2 が存在することになる．

6.6 2モードのスクイズド状態*

2つのモードからなる量子系でのスクイジングを扱うため，$g=\begin{pmatrix}\mu & \nu\\ \overline{\nu} & \overline{\mu}\end{pmatrix}\in$ $\mathrm{SU}(1,1)$ の $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)^T\in\mathbb{C}^2$ への作用を以下のように与える．

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \overline{\zeta}_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & \overline{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \overline{\zeta}_2 \end{pmatrix}. \tag{6.53}$$

すなわち，$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^T \in \mathbb{C}^2$ をベクトル $g \cdot \zeta := \begin{pmatrix} \mu\zeta_1 + \nu\overline{\zeta}_2 \\ \nu\overline{\zeta}_1 + \mu\zeta_2 \end{pmatrix}$ に移すこととする．

そして，SU(1,1) の 2 モードに対するスクイジングの操作を表す表現 S^2 は $\mathsf{S}^2(g)\mathsf{W}^2(\zeta)\mathsf{S}^2(g)^{-1} = \mathsf{W}^2(g \cdot \zeta)$ を満たすものとして与えられる．$-\overline{\zeta}_1, \zeta_2$ の係数に注目すると，この表現は以下を満たす．

$$\begin{pmatrix} \mathsf{S}^2(g)\mathsf{a}_1\mathsf{S}^2(g)^{-1} \\ \mathsf{S}^2(g)\mathsf{a}_2^\dagger\mathsf{S}^2(g)^{-1} \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} \mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_2^\dagger \end{pmatrix}. \tag{6.54}$$

ここで，微分を考えることにより，$X \in \mathfrak{su}(1,1)$ は

$$\begin{pmatrix} [\mathsf{S}^2(X), \mathsf{a}_1] \\ [\mathsf{S}^2(g), \mathsf{a}_2^\dagger] \end{pmatrix} = -X \begin{pmatrix} \mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_2^\dagger \end{pmatrix}$$

を満たす．したがって，(4.8) で与えた $\mathsf{E}_{0,-1}$, $\mathsf{K}_{\pm,-1}$ は

$$[\mathsf{E}_{0,-1}, \mathsf{a}_1] = \frac{-1}{2}\mathsf{a}_1, \quad [\mathsf{E}_{0,-1}, \mathsf{a}_2^\dagger] = \frac{1}{2}\mathsf{a}_2^\dagger$$

$$[\mathsf{K}_{+,-1}, \mathsf{a}_1] = 0, \quad [\mathsf{K}_{+,-1}, \mathsf{a}_2^\dagger] = \mathsf{a}_1 \tag{6.55}$$

$$[\mathsf{K}_{-,-1}, \mathsf{a}_1] = -\mathsf{a}_2^\dagger, \quad [\mathsf{K}_{-,-1}, \mathsf{a}_2^\dagger] = 0 \tag{6.56}$$

を満たす．$\mathsf{K}_{+,-1}^\dagger = \mathsf{K}_{+,-1}$ であるから，(6.55), (6.56) より，$\mathsf{K}_{+,-1}$ は $\mathsf{a}_1^\dagger\,\mathsf{a}_2$ を含まないので，$\mathsf{K}_{+,-1} = \mathsf{a}_1\mathsf{a}_2$, $\mathsf{K}_{-,-1} = \mathsf{a}_1^\dagger\mathsf{a}_2^\dagger$ を得る．さらに，(4.9) の第 2 式より，

$$\mathsf{E}_{0,-1} = -\frac{1}{2}[\mathsf{K}_{+,-1}, \mathsf{K}_{-,-1}] = \frac{-1}{2}(\mathsf{a}_1^\dagger\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_2^\dagger\mathsf{a}_2 + I)$$

を得る．このとき，個数ベクトル $|n, m\rangle$ は

$$\mathsf{K}_{+,-1}|n, m\rangle = \sqrt{n}\sqrt{m}|n-1, m-1\rangle,$$

$$\mathsf{K}_{-,-1}|n,m\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{m+1}|n+1,m+1\rangle$$

を満たすことから，$|n,0\rangle$, $|0,n\rangle$ は最大ウェイトベクトルとなり，$|n,0\rangle$ または $|0,n\rangle$ を含む既約成分の最大ウェイトは $\frac{-n-1}{2}$ となる．一般に，2 モードのスクイズド状態といったとき，真空ベクトル $|0,0\rangle$ を最大ウェイトベクトルとする表現のコヒーレント状態を表す．したがって，2 モードのスクイズド状態の最大ウェイトは $\frac{-1}{2}$ となり，群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の表現に拡張できる．

6.7 Heisenberg 表現の Fourier 変換*

6.1.1 項の議論より，群 $\mathbb{R}^2$ の因子団 $\{e^{\frac{i}{2}(q'p-qp')}\}_{(q,p),(q',p')}$ を持つ射影的ユニタリ表現は Heisenberg 表現 W と同値なものに限られる．そのため，この因子団を持つ群 $\mathbb{R}^2$ の Fourier 変換を Heisenberg 表現 W の W を用いて，$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}$ と記すことする．(2.8, 3.8 節で議論したように，射影的ユニタリ表現について Fourier 変換を定義するには，因子団を固定する必要があった．) したがって，$f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対して，$\zeta := \frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip)$ とすると，その Fourier 変換は $\mathcal{F}_{\mathsf{W}}[f] = \int_{\mathbb{C}} f(\zeta)\mathsf{W}(-\zeta)\frac{dqdp}{2\pi}$ で与えられる．一方，逆 Fourier 変換についてはここで，$L^2(\mathbb{R})$ 上の $\mathrm{Tr}\, XX^\dagger < \infty$ となる作用素 X を考える必要がある．このような作用素は $|X\rangle\rangle$ と同一視でき，$L^2(\mathbb{R})^{\otimes 2}$ 上の正規化されていない純粋状態と見なすことができる．したがって，$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[X](\zeta) = \mathrm{Tr}\,\mathsf{W}(\zeta)X$ となる．例えば，(6.14) より，$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[|0\rangle\langle 0|](\zeta) = \langle 0|\mathsf{W}(\zeta)|0\rangle = \langle 0|\zeta\rangle = e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}$ となり，$\alpha := \frac{1}{\sqrt{2}}(a+ib)$ について，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[|\alpha\rangle\langle\alpha|](\zeta) &= \langle 0|\mathsf{W}(-\alpha)\mathsf{W}(\zeta)\mathsf{W}(\alpha)|0\rangle \\ &= \langle 0|e^{i(ap-qb)}\mathsf{W}(\zeta)|0\rangle = e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}+i(ap-qb)}\end{aligned}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[\mathsf{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|](\zeta) &= \mathrm{Tr}\,\mathsf{W}(\zeta)\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \alpha e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}+i(ap-qb)} \\ \mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[\mathsf{a}^\dagger|\alpha\rangle\langle\alpha|](\zeta) &= \mathrm{Tr}\,\mathsf{W}(\zeta)\mathsf{a}^\dagger|\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathrm{Tr}(\mathsf{a}^\dagger - \overline{\zeta})\mathsf{W}(\zeta)|\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &= (\overline{\alpha}-\overline{\zeta})\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{W}(\zeta)|\alpha\rangle\langle\alpha| = (\overline{\alpha}-\overline{\zeta})e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}+i(ap-qb)}\end{aligned}$$

となることから，

$$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[\frac{\mathsf{a}+\mathsf{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle\langle\alpha|](\zeta) = (-i\frac{\partial}{\partial p} - \frac{q}{2})e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}+i(ap-qb)}$$
$$= (-i\frac{\partial}{\partial p} - \frac{q}{2})\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[|\alpha\rangle\langle\alpha|](\zeta)$$
$$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[-i\frac{\mathsf{a}-\mathsf{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle\langle\alpha|](\zeta) = (i\frac{\partial}{\partial q} - \frac{p}{2})e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}+i(ap-qb)}$$
$$= (i\frac{\partial}{\partial q} - \frac{p}{2})\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[|\alpha\rangle\langle\alpha|](\zeta)$$

となる．$\{|\alpha\rangle\langle\alpha|\}_\alpha$ の線型結合で，$L^2(\mathbb{R})$ 上の任意の作用素は書ける．$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 X に対して，$\zeta = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$ であるから，$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[X](\zeta)$ は2つの変数 q, p についての関数空間 $L^2(\mathbb{R}^2)$ の要素と見なすことができる．このとき，q を1つ目のモードについての変数とし，p を2つ目のモードの変数とすると，q, p を掛ける操作はそれぞれ，作用素 Q_1, Q_2 で表される．同様に，q, p についての微分の $-i$ 倍はそれぞれ，P_1, P_2 と書ける．したがって，

$$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[\mathsf{Q}X](\zeta) = (\mathsf{P}_2 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_1)\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[X](\zeta)$$
$$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[\mathsf{P}X](\zeta) = (-\mathsf{P}_1 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_2)\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[X](\zeta)$$

となる．ここで，$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 Y に対して，作用素空間上の作用素 L_Y を $L_Y : X \mapsto YX$ で定義し，$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}$ が関数空間 $L^2(\mathbb{R}^2)$ から $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素へのユニタリ作用素であることに注意すると，

$$\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}L_{\mathsf{Q}}\mathcal{F}_{\mathsf{W}} = \mathsf{P}_2 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_1, \quad \mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}L_{\mathsf{P}}\mathcal{F}_{\mathsf{W}} = -\mathsf{P}_1 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_2 \tag{6.57}$$

を得る．以下では，$L^2(\mathbb{R})^{\otimes 2}$ 上の状態 $|X\rangle\rangle$ に対して，不確定性関係 (6.16) の一般化として，エネルギー拘束条件

$$\langle\langle X|\mathsf{Q}^2 + \mathsf{P}^2|X\rangle\rangle \le E \tag{6.58}$$

を課して，その逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[X]$ について

$$\int_{\mathbb{R}^2} 2|\zeta|^2|\mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[X](\zeta)|^2 dqdp \tag{6.59}$$

を最小化する問題を考える．この問題では，逆 Fourier 変換の前後での波束の広がりのトレードオフを扱うことになる．

X を逆 Fourier 変換で $L^2(\mathbb{R}^2)$ の要素 $\phi := \mathcal{F}_{\mathsf{W}}^{-1}[X]$ に移すと，(6.57) より，条件 (6.58) は条件 $\langle\phi|(\mathsf{P}_2 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_1)^2 + (-\mathsf{P}_1 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_2)^2|\phi\rangle \le E$ に変換できる．このとき，最小化すべき値は $\langle\phi|\mathsf{Q}_1^2 + \mathsf{Q}_2^2|\phi\rangle$ となる．ここで，$\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ の以下の要素

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いると，(6.54) より，

$$\mathsf{S}^2(g)((\mathsf{P}_2 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_1)^2 + (-\mathsf{P}_1 - \frac{1}{2}\mathsf{Q}_2)^2)\mathsf{S}^2(g)^{-1} = \mathsf{P}_1^2 + \mathsf{P}_2^2$$
$$\mathsf{S}^2(g)(\mathsf{Q}_1^2 + \mathsf{Q}_2^2)\mathsf{S}^2(g)^{-1} = \mathsf{Q}_1^2 + \mathsf{Q}_2^2$$

を得る．したがって，$\langle\phi|\mathsf{S}^2(g)^{-1}\mathsf{P}_1^2\mathsf{S}^2(g)|\phi\rangle = E_1$, $\langle\phi|\mathsf{S}^2(g)^{-1}\mathsf{P}_2^2\mathsf{S}^2(g)|\phi\rangle = E_2$ とすると，(6.16) より，

$$\langle\phi|\mathsf{Q}_1^2 + \mathsf{Q}_2^2|\phi\rangle = \langle\phi|\mathsf{S}^2(g)^{-1}(\mathsf{Q}_1^2 + \mathsf{Q}_2^2)\mathsf{S}^2(g)^{-1}|\phi\rangle \ge \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)$$

となる．さらに，$E_1 + E_2 \ge E$ であるから，$\frac{1}{4}(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}) \ge \frac{1}{2E}$ となり，$\langle\phi|\mathsf{Q}_1^2 + \mathsf{Q}_2^2|\phi\rangle \ge \frac{1}{2E}$ を得る．また，(6.16) の等号を達成する純粋状態が存在することから，上記の等号を達成する $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ が存在する．

6.8 多モードのスクイジング*

次に，複数のモードに渡るスクイジングの作用について扱う．3 つ以上のモードに渡るスクイジングを記述するには，SU(1,1) 群の作用だけでは不十分であり，モード数が r の場合，代わりに**シンプレクティク群** $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の表現 S^r を考えることになる．

この場合，$g \in \mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の表現は (6.48) の一般化として，$\mathsf{S}(g)\vec{\mathsf{R}}\mathsf{S}(g)^{-1} = g^{-1}\vec{\mathsf{R}}$ を満たすものとして与えられる．ここで，(5.33) で一般化した κ を用いると，$\begin{pmatrix} \mathsf{S}^r(g)\vec{\mathsf{a}}\mathsf{S}(g)^{-1} \\ \mathsf{S}^r(g)\vec{\mathsf{a}}^\dagger\mathsf{S}(g)^{-1} \end{pmatrix} = \kappa^{-1}(g^{-1}) \begin{pmatrix} \vec{\mathsf{a}} \\ \vec{\mathsf{a}}^\dagger \end{pmatrix}$ を得る．

以下，上記の条件がどのような表現を導くか知るために，$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$ の構造について簡単に触れる．$\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$ の複素化は $\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{C})$ となり，$\mathfrak{sp}(r)$ の複素化と一致する．さらに，$\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群は $\mathfrak{u}(r)$ となり，$\mathfrak{u}(r)$ は $\mathfrak{sp}(r)$ の極大 Cartan 部分 Lie 環を含むので，$\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$ のルート系 $\Phi_{\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})}$ は $\mathfrak{sp}(r)$ のルート系に一致する．ルート系 $\Phi_{\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})}$ はコンパクトな部分 $\Phi_{\mathfrak{u}(r)}$ と，非コンパクトな部分 $\Phi_{\mathfrak{p}}$ に分かれ，5.6 節の記号を用いると，それぞれの正のルートは $\Phi^+_{\mathfrak{u}(r)} = \{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}\}_{1\le j<l\le r}$, $\Phi^+_{\mathfrak{p}} = \{\boldsymbol{\beta}_{j,l}\}_{1\le j\le l\le r}$ で与えられる．特に，$\mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$ はエルミート型となり，$\boldsymbol{\beta}_{r,r}$ が $\boldsymbol{\beta}$ に一致する．$Z_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}$, $Z_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$, $F^x_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}$, $F^y_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}$ は $\mathfrak{u}(r)$ に含まれるため，$\mathfrak{sp}(r)$ と全く同じである．$F^x_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$, $F^y_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ は $\mathfrak{sp}(r)$ のときとは異なり，以下で与えられる．

$$F^x_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle l| + |l\rangle\langle j|) \otimes F^x_{-1} & j<l\text{のとき} \\ |j\rangle\langle j| \otimes F^x_{-1} & j=l\text{のとき} \end{cases}$$

$$F^y_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle l| + |l\rangle\langle j|) \otimes F^y_{-1} & j<l\text{のとき} \\ |j\rangle\langle j| \otimes F^y_{-1} & j=l\text{のとき} \end{cases}$$

したがって，極大 Cartan 部分代数の要素と，$F^x_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}$, $F^y_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}$ の表現については，6.3 節で与えたものと一致する．ただし，6.3 節で与えたものは最大ウェイトに対応する λ_F についての任意性があったが，この値は以下の議論から $-\frac{1}{2}$ に決まる．$F^x_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ と $F^y_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ の表現を決める必要があるが，これらの表現を扱う代わりに，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ と $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ を扱う．$j=l$ のときは，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$, $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ $Z_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ の交換関係は $\mathfrak{su}(1,1)$ の交換関係に帰着され，交換関係には，a_j と $\mathsf{a}_j^\dagger$ のみが現れるので，6.5 節で扱った 1 モードのスクイジングに帰着される．したがって，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}} = \frac{1}{2}\mathsf{a}_j^2$, $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\beta}_{j,l}} = \frac{1}{2}(\mathsf{a}_j^\dagger)^2$ を得る．また，$-\mathsf{f}(|j\rangle\langle j|) = -\mathsf{a}_j^\dagger\mathsf{a}_j - \frac{1}{2}I$ となり，6.3 節で与えた最大ウェイト λ は $\frac{-1}{2}$ となる．

同様に，$j<l$ のときは，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$, $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ $Z_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ の交換関係は $\mathfrak{su}(1,1)$ の交換関係に帰着され，交換関係には，a_j, a_l, $\mathsf{a}_j^\dagger$, $\mathsf{a}_l^\dagger$ のみが現れるので，6.6 節

で扱った2モードのスクイジングに帰着される．したがって，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}} = \mathsf{a}_j\mathsf{a}_l$, $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\beta}_{j,l}} = \mathsf{a}_j^\dagger\mathsf{a}_l^\dagger$ を得る．

$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}$, $\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\alpha}_{j,l}}$ の作用は全粒子数を保存し，$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ の作用は全粒子数を2つ減らし，$\mathsf{K}_{-\boldsymbol{\beta}_{j,l}}$ の作用は全粒子数を2つ増やす．したがって，空間 $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r}$ は全粒子数が偶数の空間 $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r:\mathrm{even}}$ と奇数の空間 $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r:\mathrm{odd}}$ に分かれる．$L^2(\mathbb{R})^{\otimes r:\mathrm{even}}$ の最大ウェイトベクトルは $|0,\ldots,0\rangle$ となり，最大ウェイトは $-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}$ となる．そのため，$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の部分群である $\mathrm{U}(r)$ の作用について，その表現が定まらず，その二重被覆群 $\check{\mathrm{U}(r)}$ のみの表現が定まる．同じように，$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の表現は定まらず，その二重被覆群 $\mathrm{Sp}(\check{2r},\mathbb{R})$ のみの表現が定まる．また，$\mathcal{V}[\mathsf{K}^j_{-\boldsymbol{\beta}}]|0,\ldots,0\rangle$ は全粒子数が $2j$ となる空間と一致し，$\mathfrak{u}(r)$ の作用に関して既約となる．したがって，$L^2(\mathbb{R})^{\otimes r:\mathrm{even}}$ への表現は $\mathfrak{u}(r)$-既約となる．この空間の最大ウェイトベクトル $|0,\ldots,0\rangle$ は5.9節で与えた記号を用いると，$|-\frac{1}{2}\boldsymbol{v};-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\rangle$ となる．

Cartan 分解を適用すると，$\mathrm{Sp}(\check{2r},\mathbb{R})$ の作用は $\check{\mathrm{U}(r)}$ の要素 g の表現 $\mathsf{U}(g)$ と複素対称行列 $\zeta = \{\zeta_{k,l}\}$ を用いて，$\mathsf{U}(g)\exp(\frac{1}{2}\sum_{k,l}\zeta_{k,l}\mathsf{a}_k^\dagger\mathsf{a}_l^\dagger - C.C.)$ で与えられる．ここで，$C.C.$ は共役作用素を表す．ここで，$g' \in \mathrm{U}(r)$ を適切に選ぶと，行列 $g'\zeta g'^T$ は対角行列 $\begin{pmatrix} \eta_1 & & & \\ & \eta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \eta_r \end{pmatrix}$ となる．（ここで η_j は実数である．）したがって，$\mathsf{S}_j^r(\eta_j) := \exp(\frac{1}{2}\eta_j(\mathsf{a}_j^\dagger)^2 - C.C.)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{U}(g)\exp(\frac{1}{2}\sum_{k,l}\zeta_{k,l}\mathsf{a}_k^\dagger\mathsf{a}_l^\dagger - C.C.) \\
&= \mathsf{U}(g)\mathsf{U}(g')^\dagger\mathsf{U}(g')\exp(\frac{1}{2}\sum_{k,l}\zeta_{k,l}\mathsf{a}_k^\dagger\mathsf{a}_l^\dagger - C.C.)\mathsf{U}(g')^\dagger\mathsf{U}(g') \\
&= \mathsf{U}(g)\mathsf{U}(g')^\dagger\mathsf{S}_1^r(\eta_1)\mathsf{S}_2^r(\eta_2)\cdots\mathsf{S}_r^r(\eta_r)\mathsf{U}(g') \\
&= \mathsf{U}(g)\mathsf{U}(g')^\dagger\mathsf{S}_1^r(\eta_1)\mathsf{U}_{1,2}\mathsf{S}_1^r(\eta_2)\mathsf{U}_{1,2}^\dagger\cdots\mathsf{U}_{1,r}\mathsf{S}_1^r(\eta_r)\mathsf{U}_{1,r}^\dagger\mathsf{U}(g')
\end{aligned}
$$

となる．これは，$\mathrm{Sp}(\check{2r},\mathbb{R})$ の作用は1番目のモードについてのスクイジング作用と，$\mathrm{U}(r)$ の作用を組み合わせることで実現できることを示している．

次に，r モード系での一般のスクイズドベクトルを 5.9 節で与えたコヒーレントベクトルとして記述する．一般のコヒーレントベクトルは複素ベクトルを用いて与えられるが，複素対称行列 $\zeta = \{\zeta_{k,l}\}$ を用いて，以下のように与えられる．

$$\left| -\frac{1}{2}\boldsymbol{v} : \zeta \right\rangle = C_\zeta \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l}\zeta_{k,l}\mathsf{a}_k^\dagger \mathsf{a}_l^\dagger\right)\left| -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}; -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right\rangle.$$

ここで C_ζ は正規化定数である．特に，ユニタリ行列 $g \in \mathrm{U}(r)$ の作用に関して，$|-\frac{1}{2}\boldsymbol{v} : \zeta\rangle\langle -\frac{1}{2}\boldsymbol{v} : \zeta|$ は以下のように変化する．

$$\begin{aligned}
&\mathsf{U}(g)\left| -\frac{1}{2}\boldsymbol{v} : \zeta \right\rangle \\
&\quad = C_\zeta \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l}\zeta_{k,l}\mathsf{U}(g)\mathsf{a}_k^\dagger \mathsf{U}(g)^\dagger \mathsf{U}(g)\mathsf{a}_l^\dagger \mathsf{U}(g)^\dagger\right)\mathsf{U}(g)\left| -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}; -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right\rangle \\
&\quad = C_\zeta \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k,k',l,l'}\zeta_{k,l}g_{l',l}g_{k',k}\mathsf{a}_{k'}^\dagger \mathsf{a}_{l'}^\dagger\right)\left| -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}; -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right\rangle = \left| -\frac{1}{2}\boldsymbol{v} : g\zeta g^T \right\rangle.
\end{aligned}$$

g として ζ を対角化する g' を選んだ場合，上記ベクトルは $C_\zeta \exp(\frac{\eta_1}{2}(\mathsf{a}_1^\dagger)^2)|0\rangle \otimes \exp(\frac{\eta_r}{2}(\mathsf{a}_r^\dagger)^2)|0\rangle$ と一致する．したがって，規格化定数 C_ζ は $(1-|\eta_1|^2)^{\frac{1}{4}} \cdots (1-|\eta_r|^2)^{\frac{1}{4}} = (\det(I-\zeta^\dagger\zeta))^{\frac{1}{4}}$ となる．すなわち，上記のベクトルは 1 モードのスクイズドベクトルのテンソル積 $|\eta_1, 0\rangle \otimes \cdots \otimes |\eta_r, 0\rangle$ と一致する．最大ウェイトベクトルとの内積は $|\langle -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}; -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}| -\frac{1}{2}\boldsymbol{v} : \zeta\rangle|^2 = (\det(I-\zeta^\dagger\zeta))^{-\frac{1}{2}}$ となる．一方，空間 $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r:\mathrm{odd}}$ の最大ウェイトベクトルは，$|1, 0, \ldots, 0\rangle$ となり，最大ウェイトは $-\frac{1}{2}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_{1,1}$ となる．

第 7 章

Bose 粒子系の離散化

第 4 章では，与えられた空間 $\mathbb{C}^r$ のユニタリ行列全体からなる群 $\mathrm{U}(r)$ や $\mathrm{SU}(r)$ を扱った．物理的な状況によっては，全ての変換が同等に実現し得るとは限らない．人工的にこれらの操作を実現しようとする場合については，特定の変換のみが比較的容易に実現できることも多い．そのような事情を考慮すると，群 $\mathrm{U}(r)$ や $\mathrm{SU}(r)$ に加えて，それらの部分群による対称性を扱っておくことは重要である．

一方，第 6 章で扱った Heisenberg 表現は無限次元空間への表現であったが，扱っている Lie 群は有限次元であった．それにも関わらず，表現は既約であった．このように，Heisenberg 表現と類似の構造をうまく使えば，小さい群で，$\mathrm{U}(r)$ や $\mathrm{SU}(r)$ の代わりとなる働きが可能かもしれない．そのために，本章では，Heisenberg 表現の離散化や，スクイジングに対応する $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の表現の離散化について扱う．

7.1 離散 Heisenberg 表現

7.1.1 $\mathbb{Z}_d$ 上の離散 Heisenberg 表現

この節では，Heisenberg 表現の離散化を扱う．Heisenberg 表現では群 $\mathbb{R}^2$ の射影的ユニタリ表現を扱ったが，以下では，$\mathbb{R}$ を可換環 $\mathbb{Z}_d := \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ に置き換

え，$\mathbb{Z}_d^2$ の射影的ユニタリ表現を扱う [36]．この群は，可換群であるため，既約なユニタリ表現は以下に与える1次元表現 $\mathsf{f}_{s',t'}$ $(s',t'=0,\ldots,d-1)$ のどれかになる．

$$\mathsf{f}_{s',t'}(s,t)|v\rangle := e^{2\pi i(ss'+tt')/d}|v\rangle, \quad (s,t)\in\mathbb{Z}_d^2.$$

ここで，$|v\rangle$ は1次元の表現空間の基底である．したがって，互いに異なる1次元の既約表現が d^2 個あり，(2.42) を満たす．

しかし，$\mathbb{Z}_d^2$ の射影的ユニタリ表現については，既約な d 次元のものが構成できる．初めに計算基底 $\{|0\rangle,\ldots,|d-1\rangle\}$ を正規直交基底系とする空間 $\mathcal{H}$ 上の行列 $\mathsf{X}_{\mathbb{Z}},\mathsf{Z}_{\mathbb{Z}}$ を以下のように定義する．

$$\mathsf{X}_{\mathbb{Z}}|x\rangle = |x+1\rangle, \quad \mathsf{Z}_{\mathbb{Z}}|x\rangle = \omega_{\mathbb{Z}}^x|x\rangle. \tag{7.1}$$

ここで，$\omega_{\mathbb{Z}} := e^{i2\pi/d}$ とした．この定義は以下と同値である．

$$\mathsf{X}_{\mathbb{Z}} = \sum_x |x+1\rangle\langle x|, \quad \mathsf{Z}_{\mathbb{Z}} = \sum_x \omega_{\mathbb{Z}}^x|x\rangle\langle x|. \tag{7.2}$$

そして，W を以下で定義する．

$$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s,t) := \mathsf{X}^s\mathsf{Z}^t = \sum_s \omega_{\mathbb{Z}}^{xt}|x+s\rangle\langle x|, \quad \forall(s,t)\in\mathbb{Z}_d^2. \tag{7.3}$$

すると，$\omega_{\mathbb{Z}}\mathsf{XZ}=\mathsf{ZX}$ が成立するので，

$$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s,t)\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s',t') = \omega_{\mathbb{Z}}^{s't}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s+s',t+t') \tag{7.4}$$

が成り立つ．よって，因子団 $\{\omega_{\mathbb{Z}}^{s't}\}$ は (2.5) を満たすため，$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}_d^2$ の射影的ユニタリ表現となる．次元が d であり，d^2 が群の位数であるため，因子団が $\{\omega_{\mathbb{Z}}^{s't}\}$ と同値な射影的ユニタリ表現は，表現 $\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s,t)$ に限られる．また，交換関係

$$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s,t)\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s',t') = \omega_{\mathbb{Z}}^{s't-t's}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s',t')\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s,t) \tag{7.5}$$

が成り立つ．

ここで，d が奇数の場合，$\tau_{\mathbb{Z}} := \omega_{\mathbb{Z}}^{(d+1)/2}$ とし，d が偶数の場合，$\tau_{\mathbb{Z}} := e^{i\pi/d}$ とおいて，射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t)$ を以下で与える．

$$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t) := \tau_{\mathbb{Z}}^{st}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s,t) = \tau_{\mathbb{Z}}^{st}\sum_s \omega_{\mathbb{Z}}^{xt}|x+s\rangle\langle x|. \tag{7.6}$$

st は 0 から $d-1$ までの整数を与えるとする．すると，

$$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t)\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s',t') = \begin{cases} \tau_{\mathbb{Z}}^{s't-t's}\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s+s',t+t') & d \text{ が奇数のとき} \\ (-1)^{\epsilon}\tau_{\mathbb{Z}}^{s't-t's}\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s+s',t+t') & d \text{ が偶数のとき} \end{cases} \tag{7.7}$$

が成り立つ．ここで，ϵ は s,t,s',t' によって決まる 0 または 1 の整数である．したがって，$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t)$ を $\mathsf{W}((q+ip)/\sqrt{2})$ の離散版と見なし，ここで与えた $\mathbb{Z}_d^2$ の射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t)$ を $\mathbb{Z}_d^2$ の **離散 Heisenberg 表現**とよぶ．

ここで，計算基底 $\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{Z}_d}$ に対して，**双対計算基底**

$$|\hat{e}_{\mathbb{Z}}(l)\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_d}\omega_{\mathbb{Z}}^{-kl}|k\rangle, \quad l\in\mathbb{Z}_d \tag{7.8}$$

を定義すると，双対計算基底は $\mathsf{X}_{\mathbb{Z}}$ の固有ベクトルになる．$\mathsf{Z}_{\mathbb{Z}}$ は双対計算基底を移す作用となる．

補題 7.1.1

$$(\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t))^d = I \tag{7.9}$$

が成り立つ．したがって，ユニタリ行列 U と定数 c が $U\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t)U^\dagger = c\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t)$ を満たすとき，c は $\omega_{\mathbb{Z}}^n$ に限られる．

証明. d が奇数のとき，(7.7) より，$(\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t))^d = \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(ds,dt) = I$ となり題意を得る．一方，d が偶数のとき，(7.4) より，

$$(\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}(s,t))^d = \omega_{\mathbb{Z}}^{st+2st+\cdots+(d-1)st}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}^{(ds,dt)} = \omega_{\mathbb{Z}}^{std(d-1)/2}I = \tau_{\mathbb{Z}}^{std(d-1)}I.$$

よって，

$$(\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t))^d = \tau_{\mathbb{Z}}^{dst}\tau_{\mathbb{Z}}^{std(d-1)}I = \tau_{\mathbb{Z}}^{d^2st}I.$$

ここで，d は偶数であるため，$2d$ は d^2 の約数となる．(7.9) を得る． □

さらに，(7.7) で与えられる因子団に基づく $\mathbb{Z}_d^2$ の中心拡大は例 2.2.3 で与えた離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{Z}_d)$ と同型であることが示せる．したがって，群

$\mathrm{H}(2,\mathbb{Z}_d)$ について $\mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}$ を以下で定義するとユニタリ表現となる．

$$\begin{aligned}\mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}(s,t,\omega_d^n) &:= \tau_{\mathbb{Z}}^n \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t) \quad d\text{ が奇数のとき}\\ \mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}(s,t,\omega_{2d}^n) &:= \tau_{\mathbb{Z}}^n \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(s,t) \quad d\text{ が偶数のとき}\end{aligned}$$

例 7.1.2　$d=2$ のとき，離散 Heisenberg 表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}$ は具体的に以下で与えられる．

$$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(0,0)=I,\quad \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(1,0)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(0,1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(1,1)=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}.$$

7.1.2　$\mathbb{F}_q$ 上の離散 Heisenberg 表現

しかし，d が素数でない場合には，$\mathbb{Z}_d$ が体にならず，逆元が存在しないため，後の議論で不都合が生じる．この不都合を解消するため，d が素数 p の冪 $q=p^m$ の場合，$\mathsf{W}((x+iy)/\sqrt{2})$ のもう 1 つの離散版を考える．有限体 $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ のガロワ拡大を考える．すなわち，m 次の既約な多項式 f を考え，有限体 $\mathbb{F}_q := \mathbb{F}_p[X]/f(X)$ を考える．初めに計算基底 $\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{F}_q}$ を正規直交基底系とする空間 $\mathcal{H}$ 上の行列 $\mathsf{X}_{\mathbb{F}},\mathsf{Z}_{\mathbb{F}}$ を以下のように定義する．

$$\mathsf{X}_{\mathbb{F}}(s)|x\rangle = |x+s\rangle,\quad \mathsf{Z}_{\mathbb{F}}(t)|x\rangle = \omega_{\mathbb{F}}^{trtx}|x\rangle. \tag{7.10}$$

ここで，$\omega_{\mathbb{F}} := e^{i2\pi/p}$ とし，$\mathbb{F}_q$ をベクトル空間 $\mathbb{F}_p^m$ と見なしたときに掛け算 $x\mapsto zx$ を行列表示したものを M_z としたとき，$\mathrm{Tr}\,M_z$ を trz と表した．この定義は以下と同値である．

$$\mathsf{X}_{\mathbb{F}}(s)=\sum_{x\in\mathbb{F}_q}|x+s\rangle\langle x|,\quad \mathsf{Z}_{\mathbb{F}}(t)=\sum_{x\in\mathbb{F}_q}\omega_{\mathbb{Z}}^{trtx}|x\rangle\langle x|.$$

そして，$\mathsf{X}_{\mathbb{F}}(s)\mathsf{Z}_{\mathbb{F}}(t)\mathsf{X}_{\mathbb{F}}(-s) = \omega_{\mathbb{F}}^{-trst}\mathsf{Z}_{\mathbb{F}}(t)$ が成り立つので，$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s,t) := \mathsf{X}_{\mathbb{F}}(s)\mathsf{Z}_{\mathbb{F}}(t) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q}\omega_{\mathbb{Z}}^{trtx}|x+s\rangle\langle x|,\quad \forall(s,t)\in\mathbb{F}_q^2$ は $\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s,t)\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s',t') = \omega_{\mathbb{F}}^{trs't}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s+s',t+t')$ を満たす．よって，因子団 $\{\omega_{\mathbb{F}}^{trs't}\}$ は (2.5) を満たすた

め，$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}$ は $\mathbb{F}_q^2$ の射影的ユニタリ表現となる．次元が d であり，d^2 が群の位数であるため，因子団が $\{\omega_{\mathbb{F}}^{trs't}\}$ と同値な射影的ユニタリ表現は，表現 $\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s,t)$ に限られる．また，交換関係

$$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s,t)\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s',t') = \omega_{\mathbb{F}}^{tr(s't-t's)}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s',t')\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s,t) \tag{7.11}$$

が成り立つ．

ここで，$\mathbb{F}_q$ の標数 p が 2 でないときは，$\tau_{\mathbb{F}} := \omega_{\mathbb{Z}}^{(p+1)/2}$ とし，標数 p が 2 の場合，$\tau_{\mathbb{F}} := i$ とおいて，射影表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t)$ を以下で与える．

$$\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t) := \tau_{\mathbb{F}}^{trts}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}(s,t) = \tau_{\mathbb{F}}^{trts}\sum_{x\in\mathbb{F}_q}\omega_{\mathbb{F}}^{trtx}|x+s\rangle\langle x|.$$

$trts$ は 0 から $p-1$ までの整数を与えるとする．

すると，

$$\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t)\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s',t') = \begin{cases} \tau_{\mathbb{F}}^{tr(s't-t's)}\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s+s',t+t') & p\neq 2 \\ (-1)^{\epsilon}\tau_{\mathbb{F}}^{tr(s't-t's)}\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s+s',t+t') & p=2 \end{cases} \tag{7.12}$$

が成り立つ．ここで，ϵ は s,t,s',t' によって決まる 0 または 1 である整数である．したがって，$\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t)$ も $\mathsf{W}((q+ip)/\sqrt{2})$ の離散版と見なすことができ，ここで与えた $\mathbb{F}_q^2$ の射影的ユニタリ表現を $\mathbb{F}_q^2$ の **離散 Heisenberg 表現**とよぶ．q が素数 p であるときは，$\mathbb{F}_p^2$ と $\mathbb{Z}_p^2$ を同一視することで，$\mathbb{F}_p^2$ の離散 Heisenberg 表現と $\mathbb{Z}_p^2$ の離散 Heisenberg 表現は一致する．しかし，q が素数 p の冪 p^m であるときは，$\mathbb{F}_q^2$ の離散 Heisenberg 表現と $\mathbb{Z}_q^2$ の離散 Heisenberg 表現は一致しない．有限体 $\mathbb{F}_q$ に基づいて定義される表現と可換環 $\mathbb{Z}_q$ に基づいて定義される表現が異なることに注意されたい．

ここで，計算基底 $\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{F}_q}$ に対して，**双対計算基底**

$$|\hat{e}_{\mathbb{F}}(l)\rangle := \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{k\in\mathbb{F}_q}\omega_{\mathbb{F}}^{-trkl}|k\rangle, \quad l\in\mathbb{F}_q \tag{7.13}$$

を定義すると，双対計算基底は $\mathsf{X}_{\mathbb{F}}$ の固有ベクトルになる．$\mathsf{Z}_{\mathbb{F}}$ は双対計算基底を移す作用となる．

さらに，補題 7.1.1 と同じようにして以下の補題を得る．

補題 7.1.3　等式 $(\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t))^p = I$ が成り立つ．したがって，ユニタリ行列 U と定数 c が $U\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t)U^\dagger = c\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t)$ を満たすとき，c は $\omega_{\mathbb{F}}^n$ に限られる．

さらに，(7.12) で与えられる因子団に基づく $\mathbb{F}_q^2$ の中心拡大は例 2.2.5 で与えた離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{F}_q)$ と同型であることが示せる．この群 $\mathrm{H}(2,\mathbb{F}_q)$ についてのユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}$ を以下で定義する．

$$
\begin{aligned}
\mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}(s,t,\omega_p^n) &:= \tau_{\mathbb{F}}^n\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t) \quad p\text{が奇数のとき}\\
\mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}(s,t,\omega_4^n) &:= \tau_{\mathbb{F}}^n\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t) \quad p=2\text{のとき．}
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

7.1.3　多自由度の離散 Heisenberg 表現

次に，$\mathbb{Z}_d^2$ または $\mathbb{F}_q^2$ の離散 Heisenberg 表現から群 $\mathbb{Z}_d^{2r}$ またはベクトル空間 $\mathbb{F}_q^{2r}$ の $\mathcal{H}^{\otimes r} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_r$ への射影的ユニタリ表現を以下のように定義する．ここで，$\mathcal{H}_i$ は $\mathcal{H}$ と同型な空間である．空間 $\mathcal{H}^{\otimes r}$ の計算基底は，$\mathbb{Z}_d^r$ または $\mathbb{F}_q^r$ の要素 s を用いて，$|s\rangle$ と表すことができる．以下では $\mathbb{X} = \mathbb{F}_q, \mathbb{Z}_d$ とし，$\mathsf{W}_{\mathbb{X},i}(s,t)$ を i 番目の空間 $\mathcal{H}_i$ への $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}(s,t)$ の作用として定義し，以下を定義する．

$$
\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}) := \mathsf{W}_{\mathbb{X},1}(s_1,t_1) \otimes \cdots \otimes \mathsf{W}_{\mathbb{X},r}(s_r,t_r), \forall \vec{s} = (s_1,\ldots s_r,t_1,\ldots,t_r) \in \mathbb{X}^{2r}
$$

$$
\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}) := \tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X},1}(s_1,t_1) \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X},r}(s_r,t_r), \forall \vec{s} = (s_1,\ldots s_r,t_1,\ldots,t_r) \in \mathbb{X}^{2r}.
$$

したがって，$\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots s_r), \boldsymbol{t} = (t_1,\ldots t_r) \in \mathbb{X}^r$ に対して，$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})_{\mathbb{Z}} := s_1t_1 + \cdots + s_rt_r$, $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})_{\mathbb{F}} := tr(s_1t_1 + \cdots + s_rt_r)$ を定義すると，$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X}}^r(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X}}^r(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}') = \omega_{\mathbb{Z}}^{(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t})_{\mathbb{X}}}\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X}}^r(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}')$ が成り立つ．そして，$\vec{s} = (\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}), \vec{s}' = (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t}') \in \mathbb{X}^{2r}$ に対して，$\langle \vec{s},\vec{s}'\rangle_{\mathbb{X}} := (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{t})_{\mathbb{X}} - (\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}')_{\mathbb{X}}$ とすると，

$$
\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}') = \begin{cases} \tau_{\mathbb{X}}^{\langle \vec{s},\vec{s}'\rangle_{\mathbb{X}}}\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}+\vec{s}') & d\text{ または }p\text{ が奇数} \\ (-1)^{\epsilon}\tau_{\mathbb{X}}^{\langle \vec{s},\vec{s}'\rangle_{\mathbb{X}}}\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}+\vec{s}') & d\text{ または }p\text{ が偶数} \end{cases}
\tag{7.15}
$$

が成り立つ．ここで，ϵ は s,t,s',t' によって決まる 0 または 1 である整数である．よって，$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}^r$, $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r$, $\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}^r$, $\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r$ は $\mathbb{Z}_d^{2r}$, $\mathbb{F}_q^{2r}$ の射影的ユニタリ表現となる．射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r$, $\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r$ を $\mathbb{Z}_d^{2r}$ または $\mathbb{F}_q^{2r}$ の**離散 Heisenberg 表現**とよぶ．状況によって，これら 2 つのタイプの離散 Heisenberg 表現を使い分けること

になる．また，交換関係 $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}') = \omega_{\mathbb{X}}^{\langle \vec{s}, \vec{s}' \rangle_{\mathbb{X}}}\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}')\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ が成り立つ．$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{Z}}, \tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{F}}$ も同様の交換関係を満たす．

ここで与えた表現について以下の補題が成り立つ．

補題 7.1.4 射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r$ は既約である．さらに，$\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r$ と同じ因子団を持つ $\mathbb{X}^{2r}$ の既約な射影的ユニタリ表現は $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r$ と同型なものに限られる．同じ事実は $\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X}}^r$ についても成り立つ．

証明. $\vec{s} \neq 0$ のとき，$\mathrm{Tr}\,\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ は 0 であり，$\mathrm{Tr}\,\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(0)$ は表現空間の次元すなわち，q^r または d^r に等しい．したがって，射影的ユニタリ表現の場合の補題 2.8.2 より既約性を得る．さらに，射影的ユニタリ表現についての (2.42) より，$\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ と同じ因子団を持つ射影的ユニタリ表現は $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ と同型なものに限られる．

$\tilde{\mathsf{W}}_{\mathbb{X}}^r$ についても同じようにして示せる． □

さらに，d または p が奇数である場合，正の整数 k が $\mathbb{X}$ の要素として可逆であるとすると，因子団が

$$e^{i\phi(\vec{s}, \vec{s}')} = \tau_{\mathbb{X}}^{k\langle \vec{s}, \vec{s}' \rangle_{\mathbb{X}}} \tag{7.16}$$

となる射影的ユニタリ表現についても補題 7.1.4 と同じ事実が成り立つ．すなわち，$\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r$ の定義において，$\omega_{\mathbb{X}}$ を $\omega_{\mathbb{X}}^k$ に置き換えて定義される射影的ユニタリ表現を $\mathsf{W}_{\mathbb{X}:k}^r$ とすると，$\mathsf{W}_{\mathbb{X}:k}^r$ は因子団 (7.16) を持つ既約な射影的ユニタリ表現となる．そして，補題 7.1.4 の証明と同じようにして，因子団 (7.16) を持つ $\mathbb{X}^r$ の既約な射影的ユニタリ表現は $\mathsf{W}_{\mathbb{X}:k}^r$ に限られることが示せる．

また，補題 7.1.1, 7.1.3 より，以下の補題を得る．

補題 7.1.5 与えられた $\vec{s}$ について，ユニタリ行列 U と定数 c が $U\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})U^\dagger = c\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ を満たすとき，c は $\omega_{\mathbb{X}}^n$ に限られる．

射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r \otimes \overline{\mathsf{W}^r}_{\mathbb{X}}$ の表現空間を $\mathcal{H}^{\otimes r}$ 上の行列のなす線型空間とする．このとき，既約部分空間は 1 次元となり，その既約分解は $\bigoplus_{\vec{s} \in \mathbb{X}^{2r}} < \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}) >$ で与えられる．このときの作用は

$$\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r \otimes \overline{\mathsf{W}^r}_{\mathbb{X}}(\vec{s}) : \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}') \mapsto \omega_{\mathbb{X}}^{\langle \vec{s}, \vec{s}' \rangle_{\mathbb{X}}}\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}') \tag{7.17}$$

となる．したがって，以下の補題を得る．

補題 7.1.6　ユニタリ行列 U が

$$\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})U = e^{i\theta(U,\vec{s})}U\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}), \quad \forall \in \mathbb{X}^{2r} \tag{7.18}$$

を満たすとする．ただし，$\theta(U,\vec{s})$ は U,θ に依存する定数である．このとき，以下を満たす $\vec{s}' \in \mathbb{X}^{2r}$ が存在する．U は $\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}')$ のスカラー倍であり，$e^{i\theta(U,\vec{s})} = \omega_{\mathbb{X}}^{\langle \vec{s},\vec{s}'\rangle_{\mathbb{X}}}$ となる．

証明.　(7.18) を変形することで，任意の $\vec{s} \in \mathbb{X}^{2r}$ に対して，$\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})U(\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}))^\dagger = e^{i\theta(U,\vec{s})}U$ が成り立つ．したがって，上記の議論より直ちに補題の主張が得られる．　□

さらに，(7.15) で与えられる因子団に基づく $\mathbb{Z}_d^{2r}$ の中心拡大は例 2.2.4 で与えた離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$ と同型であることが示せる．この群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$ についてのユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned} \mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\omega_d^n) &:= \tau_{\mathbb{Z}}^n \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \quad d\text{ が奇数のとき} \\ \mathsf{W}_{\mathbb{Z},\mathrm{H}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\omega_{2d}^n) &:= \tau_{\mathbb{Z}}^n \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \quad d\text{ が偶数のとき} \end{aligned} \tag{7.19}$$

同じように，さらに，(7.15) で与えられる因子団に基づく $\mathbb{F}_q^{2r}$ の中心拡大は例 2.2.6 で与えた離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ と同型であることが示せる．この群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ についてのユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned} \mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\omega_p^n) &:= \tau_{\mathbb{F}}^n \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \quad p\text{ が奇数のとき} \\ \mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\omega_4^n) &:= \tau_{\mathbb{F}}^n \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \quad p = 2\text{ のとき．} \end{aligned} \tag{7.20}$$

上記の議論では $\mathbb{Z}_d^{2r}$, $\mathbb{F}_q^{2r}$ の射影的ユニタリ表現から，離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$, $\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ のユニタリ表現を与えたが，逆に，離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$, $\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q)$ のユニタリ表現から $\mathbb{Z}_d^{2r}$, $\mathbb{F}_q^{2r}$ の射影的ユニタリ表現を与えることも可能である．この関係に注意し，補題 7.1.4 を用いることで，以下の補題を得る．

補題 7.1.7　ユニタリ表現 $\mathsf{W}^r_{\mathbb{X},\mathrm{H}}$ は既約である．さらに，離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$ の既約ユニタリ表現でその中心に限った表現が $\mathsf{W}^r_{\mathbb{X},\mathrm{H}}$ と同型なものは，$\mathsf{W}^r_{\mathbb{X},\mathrm{H}}$ と同型なものに限られる．

証明. 部分群 $\mathbb{X}^{2r}$ に制限した場合でも既約であるので，$\mathsf{W}^r_{\mathbb{X},\mathrm{H}}$ は既約となる．$\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$ の既約ユニタリ表現が与えられたとき，$\mathrm{H}(2r,\mathbb{Z}_d)$ の中心に制限した表現は部分群 $\mathbb{X}^{2r}$ に制限した射影的ユニタリ表現の因子団を与える．したがって，補題 7.1.4 より後半の議論を得る． □

さらに，$\mathsf{W}^r_{\mathbb{F}:k}$ と同じようにして，離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r,\mathbb{X})$ に対して，$\mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}:k}$ を定義することができる．このユニタリ表現についても補題 7.1.7 と同じ補題が成り立つ．

7.1.4 部分群の既約表現

$\mathbb{X}^{2r}$ の $\mathbb{X}$ の積に関して閉じた部分群 N （以下 $\mathbb{X}$-部分群とよぶ）で任意の $\vec{s},\vec{s}\,'\in N$ について $\langle\vec{s},\vec{s}\,'\rangle_{\mathbb{X}}=0$ を満たすものを考える．このような $\mathbb{X}$-部分群を**自己直交部分群**とよぶ．このとき，$N^{\perp}:=\{\vec{s}\in\mathbb{X}^{2r}\,|\,\langle\vec{s},\vec{s}\,'\rangle_{\mathbb{X}}=0,\quad\forall\vec{s}\,'\in N\}$ を定義すると，$\mathbb{X}$-部分群 N が自己直交であることの必要十分条件は $N\subset N^{\perp}$ となる．特に，$N=N^{\perp}$ となるとき，**狭義自己直交部分群**とよぶ．そして，N の双対空間 $N^*:=\mathbb{X}^{2r}/N^{\perp}$ を定義する．すると，$x\in N^*$ に対して，その代表元 $\vec{s}_x$ を用いて，$x(\vec{s}):=\langle\vec{s},\vec{s}_x\rangle_{\mathbb{X}}$ を定義すると，$x(\vec{s})$ は代表元のとり方に依存せずに定義できる．

射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}$ において，N の表現は互いに可換となる．したがって，可換群の表現であるので，既約空間は 1 次元となり，その作用はスカラーとなる．したがって，$\{\mathsf{W}_{\mathbb{X}}(\vec{s})\}_{\vec{s}\in N}$ を同時に対角化することができる．このときの同時固有値は $\mathbb{N}$ から中心となる巡回群 $\{\omega^n_{\mathbb{X}}\}_n$ への準同型写像で与えられる．この準同型写像は適切な $x\in\mathbb{N}^*$ を選ぶと，$N\ni\vec{s}\mapsto\omega_{\mathbb{X}}^{x(\vec{s})}$ で与えられる．したがって，x で与えられる $\{\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})\}_{\vec{s}\in N}$ の同時固有空間を $\mathcal{H}_x$ と記述し，$\mathcal{H}_x$ への射影を P_x とする．すなわち，

$$\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})=\sum_{x\in N^*}\omega_{\mathbb{X}}^{x(\vec{s})}P_x \tag{7.21}$$

とする．すると，$\vec{s}\,'\in\mathbb{X}^{2r}$ について

$$\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}\,')=\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}\,')\mathsf{W}_{\mathbb{X}}(\vec{s}\,')^{-1}\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}\,') \tag{7.22}$$

$$=\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}\,')\omega_{\mathbb{X}}^{\langle\vec{s},\vec{s}\,'\rangle_{\mathbb{X}}}\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})=\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}\,')\omega_{\mathbb{X}}^{[\vec{s}\,'](\vec{s})}\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}),\quad\vec{s}\in\mathbb{X}^{2r} \tag{7.23}$$

となるので，$\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^{r}(\vec{s}')\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_{x+[\vec{s}']}$ となる．

そして，以下の補題を得る．

補題 7.1.8　射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^{r}$ において，$\mathcal{H}_x$ は $N^{\perp}$ の作用について互いに異なる既約空間となる．さらに，$\mathcal{H}_x$ の次元は $|\mathbb{X}|^r/|N^*|$ となり，$\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^{r}$ と同じ因子団を持つ $N^{\perp}$ の既約な射影的ユニタリ表現は全て $\mathcal{H}_x$ で得られる．

特に，$\mathbb{X} = \mathbb{F}_q$ であり，N が r 次元の部分ベクトル空間であるとき，$\mathcal{H}_x$ の次元は q^{r-k} となる．

証明.　$x \in N^*$ について，$\mathcal{H}_x$ の $N^{\perp}$ の作用について既約でないとする．$\mathcal{H}_x$ の既約な部分空間を $\mathcal{H}'_x$ とする．上記の議論は $\mathbb{F}_q^{2r}/N^{\perp}$ の代表元のとり方に依存しないので，$(N^{\perp})^c$ の要素の作用により，$\mathcal{H}'_x$ は $\bigoplus_{y \in N^* \setminus \{0\}} \mathcal{H}_{x+y}$ に移る．すなわち，部分空間 $\mathcal{H}'_x \oplus \bigoplus_{y \in N^* \setminus \{0\}} \mathcal{H}_{x+y}$ が $\mathbb{X}^{2r}$ の作用に閉じていることになり，矛盾する．よって，$\mathcal{H}_x$ の既約性を得る．さらに，表現空間 $\mathcal{H}_x$ は N の作用に関して異なるので，$N^{\perp}$ の作用に関しても異なる．

上記の議論より，$\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y$ は互いにユニタリ行列の作用により移りあうので，同じ次元である．空間 $\mathcal{H}$ の次元は $|\mathbb{X}|^r$ であるので，$\mathcal{H}_y$ の次元は $|\mathbb{X}|^r/|N^*|$ となる．$|N^{\perp}| = |\mathbb{X}|^{2r}/|N^*|$ であり，この値は，個々の既約空間の次元の自乗に $\mathcal{H}$ に現れる既約空間の数を掛けた値 $(|\mathbb{X}|^r/|N^*|)^2 \cdot |N^*|$ に等しい．したがって，射影的ユニタリ表現の場合の (2.42) より，$\mathcal{H}$ には，因子団を固定した場合の全ての既約な射影的ユニタリ表現が含まれる．　□

次に，離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r, \mathbb{X})$ の $\mathbb{X}$-部分群の場合に上記の議論を扱う．離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r, \mathbb{X})$ の部分集合 $N^{\perp} \cdot Z$ は正規部分群となる．また，N^* も $\mathbb{X}$-部分群となり，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{X})$ は $(N^{\perp} \cdot Z) \rtimes N^*$ となる．そして，ユニタリ表現の既約性などについて，補題 7.1.8 と同様の補題が成り立つ．したがって，2.5 節で与えた N^* の $\mathbb{X}$-部分群である慣性群は単位元からなる群となる．（なお，$\mathsf{W}_{\mathbb{X},\mathrm{H}}^{r}|_{N^{\perp}\cdot Z}$ の $\mathcal{H}_0$ への制限を $\mathsf{W}_{\mathbb{X},\mathrm{H}}^{r}|_{N^{\perp}\cdot Z,0}$ と記すと，離散 Heisenberg 群 $\mathrm{H}(2r, \mathbb{X})$ の既約ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{X},\mathrm{H}}$ は**構成 2** で与えた $\mathsf{W}_{\mathbb{X},\mathrm{H}}^{r}|_{N^{\perp}\cdot Z,0}\tilde{\rtimes}1$ と一致する．）

ここで，補題 2.3.4 を $N^{\perp} \cdot Z \lhd \mathrm{H}(2r, \mathbb{X})$ に適用する．$N^{\perp} \cdot Z$ の既約ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{X},H}^{r}|_{\mathcal{H}_x}$ の指標を $\chi_{\mathrm{H},x}$ とすると，$C(N^{\perp} \cdot Z) = N \cdot Z$ であるので，

任意の $\vec{s} \in N^{\perp} \cdot Z \setminus N \cdot Z$ について，$\chi_{\mathrm{H},x}(\vec{s}) = 0$ となる．この事実を $\mathbb{X}^{2r}$ の $\mathbb{X}$-部分群 $N^{\perp}$ の $\mathcal{H}_x$ 上の射影的ユニタリ表現の指標 χ_x に適用すると以下を得る．

$$\chi_x(\vec{s}) = 0, \quad \vec{s} \in N^{\perp} \setminus N. \tag{7.24}$$

7.2 離散シンプレクティク群と Clifford 群

7.2.1 離散シンプレクティク群と Clifford 群の定義

有限体 $\mathbb{F}_q$ または環 $\mathbb{Z}_d$ 上でのスクイジングに対応する操作を扱うために，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のシンプレクティク群（**離散シンプレクティク群**）$\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ および $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d)$ を扱う．この群は，$\mathbb{R}$ 上のシンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{R})$ と同じく，

$$\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q) := \{g \in \mathrm{GL}(2r, \mathbb{F}_q) \mid g^T J_r g = J_r\}$$

$$\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d) := \{g \in \mathrm{GL}(2r, \mathbb{Z}_d) \mid g^T J_r g = J_r\}$$

で与えられる．ここで，$\mathrm{GL}(2r, \mathbb{F}_q)$, $\mathrm{GL}(2r, \mathbb{Z}_d)$ は $\mathbb{F}_q$, $\mathbb{Z}_d$ 上の $2r$ 次の可逆な正方行列のなす群を表す．また，2 次の行列式が 1 となる正方行列のなす群（2 次元特殊線型群）は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_d)$ と記すと，実数のときと同じく $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q) = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_d) = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_d)$ となる．また，$\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の位数 $|\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)|$ は $q^{r^2} \prod_{k=1}^{r}(q^{2k} - 1)$ となることが知られている [2, p.147]．一方 $\mathbb{Z}_d$ の場合，d が素数 p である場合，$|\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_p)| = p^3(1 - p_1^{-2}) \cdots (1 - p_l^{-2})$ となる [28, Lemma 3.2]．この事実は以下のように確認できる．$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_{p^k})$ の成分を $a_{i,j}$ とする．$a_{1,1}$ が可逆となる要素は $p^k p^k (p^k - p^{k-1})$ 個ある．$a_{1,1}$ が可逆でないとき，$a_{2,1}$ が可逆となる．このような要素は $p^k p^{k-1} (p^k - p^{k-1})$ 個ある．合わせると (7.25) を得る．次に，d の素因数分解が $d = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$ で与えられる場合を考えよう．$\mathbb{Z}_d$ は $\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l^{k_l}}$ と同型となり，$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_d)$ は $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}) \times \cdots \times \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_{p_l^{k_l}})$ と同型となる．したがって，(7.25) を用いると，

$$|\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_{p^k})| = (p^k)^2 (p^k - p^{k-2}) = (p^k)^3 (1 - p^{-2}) \tag{7.25}$$

となる [28, Lemma 3.2]．

以下，$\mathbb{X}^{2r}$, $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{X})$ は $\mathbb{X} = \mathbb{F}$ のとき，$\mathbb{F}_q^{2r}$, $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ を表し，$\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ のとき，$\mathbb{Z}_d^{2r}$, $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d)$ を表すこととする．

さらに，シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{X})$ は自然に可換群 $\mathbb{X}^{2r}$ に作用する．この作用を用いて，自然に半直積 $\mathbb{X}^{2r}\rtimes\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{X})$ が定義できる．この群は **Clifford 群**とよばれる[1)]．Clifford 群の要素 $(\vec{s},g)\in\mathbb{X}^{2r}\rtimes\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{X})$ は自然に $\vec{s}'\in\mathbb{X}^2$ に以下のように作用する．

$$(\vec{s},g):\vec{s}'\mapsto(g\vec{s}')+\vec{s}.$$

例 7.2.1　$q=2$, $r=1$ のとき，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_2)$ の位数は6となる．この群の要素は以下で与えられる．

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

2つ目，3つ目の元の位数は3であり，4つ目から6つ目までの元の位数は2である．したがって，この群は3次の置換群 S_3 と同型である．

Clifford 群 $\mathbb{F}_2^2\rtimes\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_2)$ は後の例 7.3.4 に述べるように，4次の置換群 S_4 すなわち，正六面体群と同型である．

7.2.2　生成元

以下，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の生成元について調べよう．$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の要素 g の対角成分が0でない場合，$\zeta,\zeta',\gamma\in\mathbb{F}_q$ を適切に選ぶと，(4.1) と同じように Gauss 分解が可能となり，

$$g=\begin{pmatrix}1&\zeta\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma^{-1}&0\\0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\zeta'&1\end{pmatrix}\tag{7.26}$$

が得られる．すなわち，

$$M_\gamma:=\begin{pmatrix}\gamma^{-1}&0\\0&\gamma\end{pmatrix},\quad Q_\zeta:=\begin{pmatrix}1&0\\\zeta&1\end{pmatrix},\quad P_\zeta:=\begin{pmatrix}1&\zeta\\0&1\end{pmatrix}\tag{7.27}$$

1) Appleby[1] は Clifford 群の拡張を行っている．

とすると，$g = P_\zeta M_\gamma Q_{\zeta'}$ が成り立つ．一方，g の成分を $a_{k,l}$ と書いたとき，$a_{1,1}$ が0であるとき，左から J を掛けると，その対角成分は可逆となる．したがって，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の要素は $Q_\zeta, P_{\zeta'}, M_\gamma, J$ の積の組み合わせで表せる．特に，$P_\zeta = -JQ_\zeta J$ が成り立つことから，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の生成元を $\{Q_\zeta\}_\zeta \cup \{M_\gamma\}_\gamma \cup \{J\}$ に限ることができる．

ここで，$p \neq 2$ とする．$\zeta_0 \in \mathbb{F}_q$ で $\zeta_0 = \gamma^2$ となる $\gamma \in \mathbb{F}_q$ が存在しないものがとれる．このとき，$\mathbb{F}_q$ の 0 以外の全ての元は γ^2 または $\gamma^2\zeta_0$ の形に書ける．したがって，関係式 $M_\gamma Q_\zeta M_{\gamma^{-1}} = Q_{\gamma^2\zeta}$ より，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の生成元を $\{Q_1\}\cup\{Q_{\zeta_0}\}\cup\{M_\gamma\}\cup\{J\}$ に限ることができる．さらに，$M_{\gamma'}M_\gamma = M_{\gamma'\gamma}$ が成り立つことから，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の生成元を $\{Q_1\}\cup\{Q_{\zeta_0}\}\cup\{M_\gamma\}_{\gamma\in G_\times(\mathbb{F}_q)}\cup\{J\}$ に限ることができる．ここで，$G_\times(\mathbb{F}_q)$ は乗法についての生成元を表す．

一方，$p = 2$ のとき，$\mathbb{F}_q$ において，$x \mapsto x^2$ は全単射であるので，このとき，$\mathbb{F}_q$ の 0 以外の全ての元は γ^2 の形に掛ける．したがって，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の生成元を $\{Q_1\}\cup\{M_\gamma\}_{\gamma\in G_\times(\mathbb{F}_q)}\cup\{J\}$ に限ることができる．

そして，この生成元は以下の関係式を満たす．

$$Q_{\zeta'}Q_\zeta = Q_{\zeta'+\zeta},\ M_\gamma Q_\zeta = Q_{\gamma\zeta}M_\gamma,\ JM_\gamma = M_{-\gamma}J,\ J^2 = -I. \tag{7.28}$$

なお，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}_d)$ の場合，対角成分が可逆であれば，分解 (7.26) が可能となる．したがって，この議論は，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}_d)$ の場合にもそのまま適用できる．

次に，群 $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ に注目しよう．$\mathbb{F}_q$ 係数の $r\times r$ 行列 ζ, γ で $\zeta^T = \zeta$, $\det\gamma \neq 0$ となるものを考える．すなわち，ζ は対称行列であり，γ は可逆な行列である．$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ の要素 M_γ, Q_ζ, P_ζ を以下で定義する．

$$M_\gamma := \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^T \end{pmatrix},\quad Q_\zeta := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \zeta & I_r \end{pmatrix},\quad P_\zeta := \begin{pmatrix} I_r & \zeta \\ 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

すると，J_r, Q_ζ, P_ζ, M_γ が上記と同じ関係式を満たす．以下では，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のベクトル空間 $\mathbb{F}_q^r$ の基底を $\{|k)\}_{k=1}^r$ で表すことにする．そして，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の一般線型群 $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q,r)$ の元 $Q_{k,l:\zeta} := \zeta|k)(l| + \sum_{k=1}^r |k)(k|$ を与える．

第 j 成分と第 $j+r$ 成分だけに関する作用に注目すると，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ を $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ の部分群と見なすことができる．したがって，その直積群 $\underbrace{\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)\times\cdots\times\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)}_{r}$ も $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ の部分群となる．同様に，

$\underbrace{\mathbb{F}_q^\times \times \cdots \times \mathbb{F}_q^\times}_{r}$ も $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q, r)$ の部分群となる.

このとき，以下の定理が成り立つ.

定理 7.2.2　$p \neq 2$ のとき，$\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ は部分群 $\underbrace{\mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)}_{r}$ に $\{M_{Q_{j,l:1}}\}_{j,l} \cup \{M_{Q_{j,l:\zeta_0}}\}_{j,l}$ を加えたもので生成される．なお，γ_0 が $\{\zeta^2\}_{\zeta \in \mathbb{F}_q}$ の有限和で与えられる場合は，$\underbrace{\mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)}_{r}$ に $\{M_{Q_{j,l:1}}\}_{j,l}$ を加えたもので生成される.

$p = 2$ のとき，$\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ はその部分群 $\underbrace{\mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)}_{r}$ に $\{M_{Q_{j,l:1}}\}_{j,l}$ を加えたもので生成される.

この定理の証明のために以下の補題を準備する.

補題 7.2.3　$p \neq 2$ のとき，$\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q, r)$ はその部分群 $\underbrace{\mathbb{F}_q^\times \times \cdots \times \mathbb{F}_q^\times}_{r}$ に $\{Q_{j,l:1}\}_{j,l} \cup \{Q_{j,l:\zeta_0}\}_{j,l}$ を加えたものにより生成される．なお，γ_0 が $\{\zeta^2\}_{\zeta \in \mathbb{F}_q}$ の有限和で与えられる場合は，$\underbrace{\mathbb{F}_q^\times \times \cdots \times \mathbb{F}_q^\times}_{r}$ に $\{Q_{j,l:1}\}_{j,l}$ を加えたもので生成される.

$p = 2$ のとき，$\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q, r)$ はその部分群 $\underbrace{\mathbb{F}_q^\times \times \cdots \times \mathbb{F}_q^\times}_{r}$ に $\{Q_{j,l:1}\}_{j,l}$ を加えたものにより生成される.

補題 7.2.3 の証明.　行列の基本変形を考えることにより，$\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q, r)$ はその部分群 $\underbrace{\mathbb{F}_q^\times \times \cdots \times \mathbb{F}_q^\times}_{r}$ に $\{M_{Q_{j,l:\zeta}}\}_{j,l,\zeta \in \mathbb{F}_q}$ および置換行列 $T_{j,l} := |j\rangle\langle l| + |l\rangle\langle j|$ を加えたものから生成されることがわかる．そして，第 j 成分が x となり，他の対角成分が1となる対角行列を $D_j(x)$ とすると，$T_{j,l} = D_j(-1) Q_{j,l:-1} Q_{l,j:1} Q_{j,l:-1}$ となる．さらに，$D_j(\gamma) D_l(\gamma^{-1}) Q_{l,j:\zeta} D_j(\gamma^{-1}) D_l(\gamma) = Q_{l,j:\gamma^2\zeta}$ となる．これらの事実に加え，先に述べた $\gamma \in \mathbb{F}_q$ と $\gamma^2 \in \mathbb{F}_q$ の関係から題意を得

る．□

定理 7.2.2 の証明.　初めに，$\{J_r\} \cup \{Q_\zeta\} \cup \{M_\gamma\}$ が $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の生成元となることが知られている [27, Theorem 3.3][2)].

以下では，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のベクトル空間 $\mathbb{F}_q^{2r}$ の基底を $\{|k)\}_{k=1}^{2r}$ で表すことにする．行列 $J_{r,j}$ を

$$J_{r,j} = -|j)(j+r| + |j+r)(j| + \sum_{k \neq j}(|k)(k| + |k+r)(k+r|) \tag{7.29}$$

で与える．この要素は，上記の部分群に含まれる．$J_r = J_{r,1} \cdots J_{r,r}$ なので，J_r は上記の部分群に含まれる．さらに，$M_\gamma Q_\zeta M_{\gamma^{-1}} = Q_{\gamma^T \zeta \gamma}$ が成り立つことから，任意の対称行列 ζ は M_γ の両側からの作用により，対角化可能となる．ここで，第 j 対角成分が x であり，他の対角成分が 0 となる行列を $\zeta_j(x)$ とする．行列 $\zeta_j(x)$ は上記の部分群に含まれる．したがって，これらの議論に補題 7.2.3 を加えることで題意を得る．□

7.2.3　自己直交部分群の構造

以下では，シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の要素を用いた $\mathbb{F}_q^{2r}$ 上の自己直交部分群 N の表示を考える．そのために，第 j 成分のみが 1 で他が 0 となる $\mathbb{F}_q^{2r}$ の要素を e_j と記す．すると，自己直交部分群 N が $\mathbb{F}_q^k$ と同型である場合，すなわち，次元が k である場合には，$k \leq r$ となる．その典型例として $e_1, \ldots, e_k$ で生成される $\mathbb{F}_q$-部分群として，群 $\mathbb{F}_q^{(k)}$ を与える．したがって，任意の k 次元の自己直交部分群 N は適当な $g \in \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ を用いると，$\mathbb{F}_q^{(k)}$ の g による像となる．特に，$\mathbb{F}_q^{(k)}$ の g による像は g の第 1 列から第 k 列からなるベクトル $e(g)_1, \ldots, e(g)_k$ から生成される $\mathbb{F}_q$-部分群と一致する．したがって，これら k 個のベクトルを並べて得られる $2r \times m$ の行列 $A(g)$ を自己直交部分群 N の**生成行列**という．また，任意の $h \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{F}_q)$ について，$A(g)h$ も同じ自己直交部分群 N の生成行列となる．

---

2) 文献 [27] は一貫して，$p \neq 2$ を仮定しているため，この事実は $p \neq 2$ の場合のみこの文献で示されている．しかし，証明を見ると条件 $p \neq 2$ を用いていないため，$p = 2$ の場合でも成り立つ．

特に，N が狭義自己直交部分群の場合，生成行列 $A(g)$ の上半分からなる行列が可逆である場合，その可逆行列の逆を左から掛けることで，生成行列の上半分は単位行列となる．このような生成行列の下半分は，自己直交性より対称行列 ζ となる．したがって，生成行列の上半分が非可逆である場合を除いて，狭義自己直交部分群は $\mathbb{F}_q^r$ 上の $r \times r$ の対称行列 ζ を用いて表すことができる．

7.3　メタプレクティク表現

7.3.1　射影的ユニタリ表現の存在

次に，シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{X})$ の $\mathcal{H}^{\otimes r}$ への射影的ユニタリ表現を与えよう．初めに，d もしくは p が奇数である場合を考えよう．このとき，$g, g' \in \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ または $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d)$ に対して，

$$\langle \vec{s}, \vec{s}' \rangle_{\mathbb{X}} = \langle g(\vec{s}), g(\vec{s}') \rangle_{\mathbb{X}} \tag{7.30}$$

が成り立つ．(7.15) より，この事実は，表現 $\vec{s} \mapsto \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r g(\vec{s})$ が表現 $\vec{s} \mapsto \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ と同値であることを示している．補題 7.1.4 より，表現 $\vec{s} \mapsto \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ は既約であるので，以下を満たすユニタリ行列 $\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)$ が存在する．

$$\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)^\dagger = \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(g(\vec{s})). \tag{7.31}$$

さらに，

$$\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g')\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g')^\dagger\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)^\dagger = \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(gg'(\vec{s})) = \mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(gg')\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(gg')^\dagger$$

となることから，$\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g') = e^{i\theta(g,g')}\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(gg')$ を満たす実数 $\theta(g, g')$ が存在する．よって，$g \mapsto \mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)$ は射影的ユニタリ表現となる．この表現をシンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{X})$ の**メタプレクティク表現**とよぶ．

一方，d もしくは p が偶数である場合は，基本的に同じ方法で示すことができるがやや工夫が必要である．$g, g' \in \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{X})$ に対して，(7.30) は成り立つが，表現 $\vec{s} \mapsto \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(g(\vec{s}))$ が表現 $\vec{s} \mapsto \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ と同値であることは限らない．ここで，$\mathbb{X}^{2r} = \mathbb{F}_q^{2r}, \mathbb{Z}_d^{2r}$ の生成元を以下の方法で選ぶ．$\mathbb{Z}_d^{2r}$ については，第 j 成分のみ 1 となり，他が 0 となる元 e_j を考える．$\mathbb{Z}_d^{2r}$ は $\{e_j\}_{j=1}^{2r}$ によって生成される加群である．一方，$\mathbb{F}_q^{2r}$ については，初めに，$\mathbb{F}_q$ の $\mathbb{F}_p$ 上のベクトル空間とし

て考えたときの基底を e_k を考える．そして，$\mathbb{F}_q^{2r}$ の，第 j 成分のみ f_k となり，他が0となる元 $f_{k,j}$ を考える．$\mathbb{F}_q^{2r}$ は $\{f_{k,j}\}$ によって生成される加群である．この生成元を順番を取り替えて $\{e_j\}$ と記す．上記の離散 Heisenberg 表現はこれらの生成元 $\{e_j\}$ の表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(e_j)$ が与えられれば，これらの積およびスカラー倍で与えられることがわかる．ここで，新たな表現 $\vec{s} \mapsto \mathsf{W}'^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})$ を以下の方法で定義する．はじめに，$\mathsf{W}'^r_{\mathbb{X}}(e_j) = \mathsf{W}'^r_{\mathbb{X}}(g(e_j))$ で定義する．このとき，生成元の表現の間での交換関係は表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r$ と同一である．そして，生成元以外の元の表現は7.1節と同じ方法で，$\mathsf{W}'^r_{\mathbb{X}}(e_j) = \mathsf{W}'^r_{\mathbb{X}}(g(e_j))$ の積およびスカラー倍で与える．すると，$\vec{s}$ に対して適当に $\epsilon_{g,\vec{s}}$ を選ぶと，$\mathsf{W}'^r_{\mathbb{X}}(\vec{s}) = (-1)^{\epsilon_{g,\vec{s}}}\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(g(\vec{s}))$ が成り立つ．$\mathsf{W}'^r_{\mathbb{X}}(\vec{s})$ が $\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})$ と同値な表現であることと，表現の既約性から，以下を満たすユニタリ行列 $\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)$ が存在する．

$$\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)^\dagger = (-1)^{\epsilon_{g,\vec{s}}}\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(g(\vec{s})). \tag{7.32}$$

さらに，

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\epsilon_{g',\vec{s}}+\epsilon_{g,g(\vec{s})}}\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g')\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g')^\dagger\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)^\dagger \\
&= \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(gg'(\vec{s})) = (-1)^{\epsilon_{gg',\vec{s}}}\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(gg')\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s})\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(gg')^\dagger
\end{aligned}$$

となることから，$\epsilon_{g',\vec{s}}+\epsilon_{g,g'(\vec{s})} = \epsilon_{gg',\vec{s}} \pmod{2}$ となる．さらに，$\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g') = e^{i\theta(g,g')}\mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(gg')$ を満たす実数 $\theta(g,g')$ が存在する．よって，$g \mapsto \mathsf{S}_{\mathbb{X}}^r(g)$ は射影的ユニタリ表現となる．奇数の場合と同様に，この表現をシンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{X})$ のメタプレクティク表現とよぶ．この表現は性質 (7.31), (7.32) より，忠実であることがわかる．

7.3.2 表現の具体的構成

$X = \mathbb{F}$ の場合について $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ のメタプレクティク表現を具体的に与えよう．そのためには，生成元に対して，(7.31), (7.32) を満たす行列 $\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r(g)$ を与えれば十分である．$p \neq 2$ のとき，生成元の表現は以下で与えられる [27, Theorem 4.1].

$$\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r(J_{r,j}) := I_r^{\otimes(j-1)} \otimes \Big(\frac{1}{q^{1/2}}\sum_{x,y\in\mathbb{F}_q}\omega_{\mathbb{F}}^{\,trxy}|x\rangle\langle y|\Big) \otimes I_r^{\otimes(r-j)} \tag{7.33}$$

$$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(M_\gamma) := \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_q^r} |\gamma\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}| \tag{7.34}$$

$$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(Q_\zeta) := \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_q^r} \tau_{\mathbb{F}}^{(\boldsymbol{x},\zeta\boldsymbol{x})_{\mathbb{F}}}|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|. \tag{7.35}$$

$r = 1$ のときは，$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(J_r)$ は離散 Fourier 変換と一致する．$\{M_\gamma\}$ は部分群 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{F}_q)$ であるので，(7.34) は部分群 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{F}_q)$ の表現を与えていると見なすことができる．この表現は，計算基底に対して，可逆な線型演算 γ を施していることになる．この表現の面白いところは，計算基底に対して Fourier 変換して得られる操作は双対計算基底に対しては，可逆な線型演算 $(\gamma^{-1})^T$ を施す操作に対応する点にある．

また，上で与えた行列 $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(g)$ は，

$$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(J_{r,j})\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(J_{r,j})^\dagger = \mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(J_{r,j}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}))$$

$$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(M_\gamma)\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(M_\gamma)^\dagger = \mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\gamma\boldsymbol{s},\gamma^{-1}\boldsymbol{t})$$

$$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(Q_\zeta)\mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(Q_\zeta)^\dagger = \mathsf{W}^r_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}+\zeta\boldsymbol{s})$$

を満たす．したがって，定理 7.2.2 より，(7.33), (7.34), (7.35) は (7.31) を満たす射影的ユニタリ表現を与える．すなわち，定理 7.2.2 より，各系 $\mathcal{H}_j$ 上の $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)$ の表現として与えられるユニタリ行列の作用に加え，2つの系 $\mathcal{H}_j$ と $\mathcal{H}_l$ に跨る作用 $\{\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(M_{Q_{j,l:1}})\}_{j,l}$, $\{\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(M_{Q_{j,l:\zeta_0}})\}_{j,l}$ を構成することで表現 $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}$ の物理的構成が可能となる．さらに，射影的ユニタリ表現 $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(g)$ に対して，適切に g に応じてスカラー倍を掛けると，ユニタリ表現になることが知られている [27, Theorem 4.3].

一方，$p = 2$ のとき，$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(J_{r,j})$, $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(M_\gamma)$ は同じように定義できるが，$\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(Q_\zeta)$ の定義は異なる．生成元には $Q_{\zeta_j(y)}$ のみ含まれるので $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}}(Q_{\zeta_j(y)})$ のみ与えれば十分である．

そのために，$\mathbb{F}_q$ を $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間 $\mathbb{F}_2^m$ と考え，$tre_je_k = \delta_{j,k}$ となる正規直交基底 $\{e_1,\ldots,e_m\}$ を選び，この基底の下で，$\mathrm{wgt}(x)$ を要素の数 $\#\{j\in\{1,\ldots,m\}\,|\,tr(xe_j)\neq 0\}$ として定義する．すると，$x,y\in\mathbb{F}_q$ について，$x_j := tr(xe_j)\in\mathbb{F}_2$ とすると，$\mathrm{wgt}(x+y) = \mathrm{wgt}(x)+\mathrm{wgt}(y)-2\#\{j\,|\,x_j = y_j = 1\}$ が成り立つ．さらに，$x = \sum_j x_je_j$ なので，$tr(xy) = \sum_j x_jy_j =$

$\#\{j \mid x_j = y_j = 1 \pmod 2\}$ となる．したがって，

$$\tau_{\mathbb{F}}^{\mathrm{wgt}(x+y)} = \tau_{\mathbb{F}}^{\mathrm{wgt}(x)+\mathrm{wgt}(y)} \omega_{\mathbb{F}}^{tr(xy)} \tag{7.36}$$

となる．

そして，$\mathbb{F}_q$ においては，写像 $x \mapsto x^2$ は全単射であるため，任意の $y \in \mathbb{F}_q$ に対して，その平方根 $y' \in \mathbb{F}_q$ が存在する．この事実を用いて，

$$\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r(Q_{\zeta_j(y)}) := I^{\otimes j-1}\Big(\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \tau_{\mathbb{F}}^{\mathrm{wgt}(y'x)} |x\rangle\langle x|\Big) I^{\otimes r-j} \tag{7.37}$$

と定義すると [9]，後に述べるように，(7.32) を満たす．したがって，定理 7.2.2 より，(7.33), (7.34), (7.37) は (7.31) を満たす射影的ユニタリ表現を与える．すなわち，定理 7.2.2 より，各系 $\mathcal{H}_j$ 上の $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_q)$ の表現として与えられるユニタリ行列の作用に加え，2 つの系 $\mathcal{H}_j$ と $\mathcal{H}_l$ に跨る作用 $\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r(M_{Q_{j,l:1}})$, を構成することで表現 $\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r$ の物理的構成が可能となる．特に，この場合，$\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r(M_{Q_{j,l:1}})$ は系 $\mathcal{H}_l$ を制御系とし，$\mathcal{H}_j$ をターゲット系とする Control NOT (**C-NOT**) 演算とよばれる．そのため，C-NOT 演算の物理的実現が極めて重要なテーマになる．

証明. [(7.32) の証明]　以下，(7.32) を満たすことを確認するが，第 j 成分への作用のみ確認すれば十分である．すなわち，$r = 1$ のときについて (7.32) を確認すれば十分である．$r = 1$ のとき，$\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^1$ を $\mathsf{S}_{\mathbb{F}}$ と略す．(7.36) より，

$$\mathsf{S}_{\mathbb{F}}(Q_y)\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s,t)\mathsf{S}_{\mathbb{F}}(Q_y)^\dagger = \tau_{\mathbb{F}}^{\mathrm{wgt}(y's)-tr(y's)^2} \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s, t+ys)$$

が確認できる．ここで，(7.32) より，右辺が $\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r(s, t+ys)$ の 1 倍か -1 倍となるユニタリ行列 U' の存在が確かめられている．よって，

$$(-1)^\epsilon U'^\dagger \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s, t+ys) U' = \tau_{\mathbb{F}}^{\mathrm{wgt}(y's)-tr(y's)^2} \mathsf{S}_{\mathbb{F}}(Q_y)^\dagger \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(s, t+ys) \mathsf{S}_{\mathbb{F}}(Q_y)$$

となる．したがって，補題 7.1.5 より，$\tau_{\mathbb{F}}^{\mathrm{wgt}(y's)-tr(y's)^2}$ は 1 または -1 となる．すなわち，$\mathrm{wgt}(y's) - tr(y's)^2 = 0 \bmod 2$ となる．よって，(7.32) を満たすことが確認できた．□

なお，上記の議論は，$\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d)$ にも適用可能である．すなわち，J_r, M_γ, Q_ζ の表現は上記の方法で与えられる．しかも，$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_d)$ のときは，これらが生成元となるので，この方法で射影表現が具体的に構成できる．

7.3.3　既約分解などの性質

なお，$X=\mathbb{F}_q$ で $p\neq 2$ の場合，メタプレクティク表現の表現空間 $\mathcal{H}^{\otimes r}$ は以下の2つの既約部分空間に分解される [27, Theorem 4.2].

$$\mathcal{H}^{\otimes r:\mathrm{even}} := \{|\phi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes r} \,|\, \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{F}_q^r,\ \langle \boldsymbol{s}|\phi\rangle = \langle -\boldsymbol{s}|\phi\rangle\}$$

$$\mathcal{H}^{\otimes r:\mathrm{odd}} := \{|\phi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes r} \,|\, \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{F}_q^r,\ \langle \boldsymbol{s}|\phi\rangle = -\langle -\boldsymbol{s}|\phi\rangle\}.$$

既約空間 $\mathcal{H}^{\otimes r:\mathrm{even}}$, $\mathcal{H}^{\otimes r:\mathrm{odd}}$ は，それぞれ，6.8節で与えたシンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ の射影的ユニタリ表現の既約空間である偶関数空間 $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r:\mathrm{even}}$, 奇関数空間 $L^2(\mathbb{R})^{\otimes r:\mathrm{odd}}$ の離散版に対応する．これらの空間の次元は以下で与えられる．

$$\dim \mathcal{H}^{\otimes r:\mathrm{even}} = \frac{q^r+1}{2}, \quad \dim \mathcal{H}^{\otimes r:\mathrm{odd}} = \frac{q^r-1}{2}.$$

一方，$p=2$ のときについては，以下の定理が成り立つ．

補題 7.3.1　$p=2$ のときメタプレクティク表現 $\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r$ は既約である．

証明.　シンプレクティク群 $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ は部分群として，直積群 $\underbrace{\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)\times\cdots\times\mathrm{Sp}(2,\mathbb{F}_q)}_{r}$ を含む．したがって，補題2.3.6より，$r=1$ のときの既約性を示せば十分である．Q_y の作用だけに注目すると，既約部分空間は $|x\rangle$ で生成される1次元空間となる．この1次元空間は互いに異なる表現空間である．さらに，M_γ の作用を考えると，0でない x について $|x\rangle$ は互いに移りあう．最後に，$|0\rangle$ に対する J_r の作用を考えると，既約性が得られる．□

さらに，離散 Heisenberg 表現とメタプレクティク表現は (7.31), (7.32) で述べたように，条件 (2.28) を満たすことから，半直積 $\mathbb{X}^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r,\mathbb{X})$ の半直積表現 $\mathsf{V}_{\mathbb{X}}^r$ が定義できる．このとき，$\mathsf{V}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s},g)\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}\,')\mathsf{V}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s},g)^\dagger = \omega_{\mathbb{X}}^{n(g,\vec{s},\vec{s}\,')}\mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(g(\vec{s}\,')+\vec{s})$ が成り立つ．ここで，$n(g,\vec{s},\vec{s}\,')$ は $g,\vec{s},\vec{s}\,'$ から決まる整数である．したがって，半直積表現 $\mathsf{V}_{\mathbb{X}}^r$ は忠実である．

次に，群

$$C_{\mathbb{X}}(\mathcal{H}^{\otimes r})$$
$$:= \{U \in \mathrm{U}(\mathcal{H}^{\otimes r}) \mid \forall \vec{s} \in \mathbb{X}^{2r}, \exists \theta(\vec{s}, g), \exists \vec{s}' \in \mathbb{X}^{2r}, U \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}) U^\dagger = e^{i\theta(\vec{s}, U)} \mathsf{W}_{\mathbb{X}}^r(\vec{s}')\}$$

を定義する．すると，$C_{\mathbb{X}}(\mathcal{H}^{\otimes r})$ は $\mathrm{U}(\mathcal{H}^{\otimes r})$ の部分群となる．この部分には，単位行列のスカラー倍を考えることで，$\mathrm{U}(1)$ が自然に含まれている．このとき，以下の定理を得る．

定理 7.3.2 Clifford 群 $\mathbb{Z}_d^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d)$ の離散 Heisenberg 表現とメタプレクティク表現の半直積表現 $\mathsf{V}_{\mathbb{Z}}^r$ は Clifford 群 $\mathbb{Z}_d^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d)$ と $C_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^{\otimes r})/\mathrm{U}(1)$ の同型を与える．

証明. 半直積表現の単射性は，半直積表現の忠実性から直ちに確認できる．一方，半直積表現の $C_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^{\otimes r})/\mathrm{U}(1)$ への全射性は以下のように示せる．$U \in \hat{C}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}^{\otimes r})$ に対して，$g' \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}) g'^\dagger = e^{i\theta(\vec{s}, U)} \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(u(\vec{s}))$ となる $u(\vec{s})$ を選ぶ．$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}')$ と $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s})$ の交換関係と $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(u(\vec{s}'))$ と $\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(u(\vec{s}))$ の交換関係が同じであることから，

$$\langle \vec{s}', \vec{s} \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle u(\vec{s}'), u(\vec{s}) \rangle_{\mathbb{Z}} \tag{7.38}$$

を得る．さらに，

$$\begin{aligned} e^{i\theta(\vec{s}'+\vec{s}, g)} \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(u(\vec{s}' + \vec{s})) =& g' \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}) \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}') g'^\dagger = g' \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}) g'^\dagger g' \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}') g'^\dagger \\ =& e^{i(\theta(\vec{s}', g) + \theta(\vec{s}, g))} \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(u(\vec{s}')) \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(u(\vec{s})) \end{aligned}$$

となる．この事実は，$u(\vec{s}' + \vec{s}) = u(\vec{s}') + u(\vec{s})$ であることを示している．特に，$u(0) = 0$ であるから，任意の 2 つの整数 n, n' について，$u(n'\vec{s}' + n\vec{s}) = n'(\vec{s}') + nu(\vec{s})$ が成り立つ．この事実より，u の線型性が成り立ち，u は行列を用いて表せる．さらに (7.38) より，u は $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{Z}_d)$ の要素となる．よって，$\mathsf{S}_{\mathbb{Z}}^r(u)^\dagger U \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}) U^\dagger \mathsf{S}_{\mathbb{Z}}^r(u) = (-1)^\epsilon e^{i\theta'(\vec{s}, U)} \mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s})$ となる．補題 7.1.6 より，$\mathsf{W}_{\mathbb{Z}}^r(\vec{s}')$ が $\mathsf{S}_{\mathbb{Z}}^r(u)^\dagger U$ の定数倍となる $\vec{s}' \in \mathbb{Z}_d^{2r}$ が存在する．よって，題意を得た． □

そして以下の補題が成り立つ．

補題 7.3.3 空間 $\mathcal{H}^{\otimes r}$ への Clifford 群 $\mathbb{F}_q^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の射影的ユニタリ表現 $\mathsf{V}_{\mathbb{F}}^r$ とその複素共役表現 $\overline{\mathsf{V}_{\mathbb{F}}^r}$ のテンソル積表現の表現空間は $\mathcal{H}^{\otimes r}$ から $\mathcal{H}^{\otimes r}$

への線型写像の空間と見なせる．このとき，この表現の既約分解は，単位行列からなる空間とその直交補空間への分解となる．

証明. 初めに，部分群 $\mathbb{F}_q^{2r}$ の表現に注目する．すると，既約部分空間は，$\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r(\vec{s})$ で与えられる 1 次元部分空間となる．任意の 0 でない要素 $\vec{s}, \vec{s}' \in \mathbb{F}_q^{2r}$ について，$\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r(\vec{s})$ を $\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r(\vec{s}')$ に移す $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の要素が存在する．したがって，$< \mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r(0) >, < \{\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r(\vec{s})\}_{\vec{s} \neq 0} >$ が不変部分空間となり，題意を得る．□

例 7.3.4 $q = 2$, $r = 1$ のとき，Clifford 群 $\mathbb{F}_q^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の表現 $\mathsf{V}_{\mathbb{F}}^r \otimes \overline{\mathsf{V}_{\mathbb{F}}^r}$ を考えよう．この表現を空間 $< \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(1,0), \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(0,1), \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(1,1) >$ に制限する．例 7.1.2 より，この空間はトレースが 0 となるエルミート行列全体からなる空間である．この空間は $\mathbb{R}^3$ と同型である．例 7.1.2 で与えた具体的な $\mathsf{W}_{\mathbb{F}}$ の具体的な形に注意すると，(7.32) における $\epsilon_{g,\vec{s}}$ は全て 0 となることが確認できる．したがって，$\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(1,0), \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(0,1), \mathsf{W}_{\mathbb{F}}(1,1)$ を $\mathbb{R}^3$ の座標軸と見なすと，ここで与えた Clifford 群 $\mathbb{F}_q^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の $\mathbb{R}^3$ への作用は正六面体群の作用と同一である．したがって，Clifford 群 $\mathbb{F}_q^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ は正六面体群と同型であることがわかる．

補題 7.3.3 から，上記の表現を通じて，Clifford 群 $\mathbb{F}_q^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ を $\mathrm{U}(r)$ の部分集合と見なしたとき，Clifford 群 $\mathbb{F}_q^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ は $(1,1)$-design となる．したがって，定理 4.5.7 より，$(2,0)$-design となる．補題 4.5.4 より，テンソル積表現 $(\mathsf{V}_{\mathbb{F}}^r)^{\otimes 2}$ の既約部分空間は対称テンソル積空間 $\mathcal{H}_s$ と反対称テンソル積空間 $\mathcal{H}_a$ になる．以下，q が奇数である場合に限って，定理 2.5.1 を用いて，Clifford 群 $\mathbb{F}_q^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ の $\mathcal{H}^{\otimes 2r}$ への射影的ユニタリ表現 $(\mathsf{V}_{\mathbb{F}}^r)^{\otimes 2}$ をより詳しく見よう．$\mathbb{F}_q^{2r}$ の表現に注目すると，因子団は既約な射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{F}}^r$ の因子団の 2 倍となる．この因子団を持つ射影的ユニタリ表現は補題 7.1.5 の前の文章で述べたように，射影的ユニタリ表現 $\mathsf{W}_{\mathbb{F}:2}^r$ に限られる．この表現空間を $\mathcal{U}_{\mathbb{F}_q^r,2}$ と書くことにする．

次に，定理 2.5.1 を適用するため，$\mathbb{F}_q^{2r}$ の代わりに，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{F}_q)$ を扱う．すなわち，$\mathrm{H}(2r, \mathbb{F}_q) \rtimes \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{F}_q)$ のユニタリ表現 $(\mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}}^r \rtimes \mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r)^{\otimes 2}$ に注目する．ここで，$\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r$ はユニタリ表現となるように位相因子を取り直しておく．すると，上記の議論より $\mathcal{H}^{\otimes 2r}$ に現れる正規部分群 $\mathrm{H}(2r, \mathbb{F}_q)$ の既約ユニタリ表現は $\mathsf{W}_{\mathbb{F},\mathrm{H}:2}^r$

に限られる．したがって，

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{U}_{\mathbb{F}_q^r,2} \otimes \mathbb{C}^{(q^r+1)/2} \tag{7.39}$$

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{U}_{\mathbb{F}_q^r,2} \otimes \mathbb{C}^{(q^r-1)/2} \tag{7.40}$$

となる．ユニタリ表現 $\mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}:2}$ はユニタリ表現 $\mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}}$ の構成において $\omega_{\mathbb{F}}$ を $\omega_{\mathbb{F}}^2$ に置き換えるだけで得られるので，したがって，ユニタリ表現 $\mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}:2}$ の随伴表現も同じように $\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ のユニタリ表現となるようにとれる．このユニタリ表現を $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}:2}$ と記す．ここで，定理 2.5.1 を適用すると，$\mathcal{H}_s$, $\mathcal{H}_a$ への $\mathrm{H}(2r,\mathbb{F}_q) \rtimes \mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ のユニタリ表現の既約性より，$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{F}_q)$ の (7.39), (7.40) における $\mathbb{C}^{(q^r+1)/2}$, $\mathbb{C}^{(q^r-1)/2}$ への既約ユニタリ表現が存在する．これらのユニタリ表現を $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}:s}$, $\mathsf{S}^r_{\mathbb{F}:a}$ とすると，$(\mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}} \rtimes \mathsf{S}^r_{\mathbb{F}})^{\otimes 2}$ は以下のように記述できる．

$$(\mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}} \rtimes \mathsf{S}^r_{\mathbb{F}})^{\otimes 2} = \mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}:2} \tilde{\rtimes} \mathsf{S}^r_{\mathbb{F}:2} \otimes \mathsf{S}^r_{\mathbb{F}:s} \bigoplus \mathsf{W}^r_{\mathbb{F},\mathrm{H}:2} \tilde{\rtimes} \mathsf{S}^r_{\mathbb{F}:2} \otimes \mathsf{S}^r_{\mathbb{F}:a}.$$

次に，$\mathbb{X} = \mathbb{Z}_d$ の場合について考える．$\mathbb{Z}_d^{2r}$ の要素の位数は d の約数で与えられる．d の約数 m について，位数が m となる $\mathbb{Z}_d^{2r}$ の要素の集合を N_m と記す．すると，N_m の要素の数は $|N_m| = m^2 - \sum_{m'|m} |N_{m'}|$ で与えられる．特に，$d = p^k$ の場合，$|N_{p^l}| = p^{2l} - p^{2(l-1)} = p^{2(l-1)}(p^2-1)$ となる．

補題 7.3.5 空間 $\mathcal{H}^{\otimes r}$ への Clifford 群 $\mathbb{Z}_d^{2r} \rtimes \mathrm{Sp}(2r,\mathbb{Z}_d)$ の射影的ユニタリ表現 $\mathsf{V}^r_{\mathbb{Z}}$ とその複素共役表現 $\overline{\mathsf{V}^r_{\mathbb{Z}}}$ のテンソル積表現の表現空間は $\mathcal{H}^{\otimes r}$ から $\mathcal{H}^{\otimes r}$ への線型写像の空間と見なせる．このとき，この表現の既約部分空間は $< \{\mathsf{W}^r_{\mathbb{Z}}(\vec{s})\}_{\vec{s}\in S_m} >$ で与えられる．

証明. 部分群 $\mathbb{Z}_d^{2r}$ の表現に注目すると，既約部分空間は，$\mathsf{W}^r_{\mathbb{Z}}(\vec{s})$ で与えられる 1 次元部分空間となる．さらに，$\mathrm{Sp}(2r,\mathbb{Z}_d)$ の作用の下で，位数が同じ $\vec{s}$ が互いに移りあう．逆に，位数が異なる $\vec{s}'$ について，$\mathsf{W}^r_{\mathbb{Z}}(\vec{s})$ が $\mathsf{W}^r_{\mathbb{Z}}(\vec{s}')$ に移ると可逆ではない．したがって題意を得る． □

7.4 MUB と SIC POVM*

基底系 $B_0 := \{|0\rangle, \ldots, |d-1\rangle\}$ に対して，離散 Fourier 変換 DFT を施して

(2.38) で定義した基底系 $B_1 := \{|e_0\rangle, \ldots, |e_{d-1}\rangle\}$ は条件

$$|\langle e_l|j\rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}, \quad \forall l, j \in \mathbb{Z}_d \tag{7.41}$$

を満たす．基底系 B_0 から見ると，B_1 のどの基底も等しい大きさの振幅を持つので，偏りがないように見える．そのため，(7.41) の関係にある2つの基底系を Mutually unbiased basis (**MUB**) とよぶ．例えば，$\mathbb{C}^d$ 上の計算基底 $\{|x\rangle\}_{x=0}^{d-1}$ に対して，その離散 Fourier 変換による像で得られる基底

$$|\hat{e}_l\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k \in \mathbb{F}_q} e^{-2\pi i lk/d} |k\rangle = \mathsf{DFT}^\dagger |l\rangle$$

は MUB となる．後に述べるように，$d+1$ 個の MUB が存在するとき，その対称性から，対称性の高い POVM が構成でき，有益なプロトコルが構成可能となる．例えば，以下の定理が成り立つ．

定理 7.4.1 [37]　次元 d が素数 p の冪 $d = p^m$ であるとき，$d+1$ 個の互いに MUB となる基底系が存在する．

証明.　$q = p^m$ とすると，有限体 $\mathbb{F}_q$ の 離散 Heisenberg 表現を用いることで，以下のように $d+1$ 個の互いに MUB となる基底系が構成できる．

互いに可換となる行列の集合 $\{\mathsf{W}_{\mathbb{F}}(xs, xt)\}_{x \in \mathbb{F}_q}$ から，それらを同時対角化する1つの基底が1つ決まるので，その基底を $B_{(s,t)}$ と記す．そして，基底 $B_{(0,1)}$ は計算基底に対応し，基底 $B_{(1,0)}$ の要素は $\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \frac{1}{q^{1/2}} \omega_{\mathbb{F}}^{trxt} |x\rangle$ で与えられる．したがって，これらの基底は互いに MUB となる．ここで，$\mathbb{F}_q^2 \setminus (0,0)$ の要素に対して，スカラー倍の作用で移り合うものを同値 $\sim$ とする．このとき，互いに同値でない $(s,t), (s',t') \in \mathbb{F}_q^2$ に対して，適当な $g \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_q)$ を選ぶと，$g(s,t) = (0,1), g(s',t') = (1,0)$ となる．すなわち，ユニタリ行列 $\mathsf{S}_{\mathbb{F}}^r(g)$ の作用で，基底 $B_{(s,t)}$，$B_{(s',t')}$ は $B_{(0,1)}$，$B_{(1,0)}$ に移るので，これら2つの基底は互いに MUB となる．

さらに，$|(\mathbb{F}_q^2 \setminus (0,0))/\sim| = q + 1$ となるから，題意を得る．　□

以下の定理も成り立つ．

定理 7.4.2　互いに, MUB となる $d+1$ 個の基底からなる集合 $B_1 \cup \cdots \cup B_{d+1}$ は $(1,1)$-design となり，$(2,0)$-design となる．

証明. B_j に属す基底を $u_{1,j},\ldots,u_{d,j}$ とし，合成系 $\mathbb{C}^d\otimes\mathbb{C}^d$ 上のベクトル $|\frac{1}{\sqrt{d}}I\rangle\rangle$ を Φ と記す．このとき，合成系 $\mathbb{C}^d\otimes\mathbb{C}^d$ の部分空間 $\mathcal{B}'_j = < u_{1,j}\otimes\overline{u_{1,j}}-\frac{1}{\sqrt{d}}\Phi,\ldots,u_{d-1,j}\otimes\overline{u_{d-1,j}}-\frac{1}{\sqrt{d}}\Phi >$ は Φ の直交補空間の部分空間となり，その次元は $d-1$ となる．

$$\langle u_{i,j}\otimes\overline{u_{i,j}}-\frac{1}{\sqrt{d}}\Phi|u_{i',j'}\otimes\overline{u_{i',j'}}-\frac{1}{\sqrt{d}}\Phi\rangle=0,\quad j\neq j',$$

が成り立つので，部分空間 $\mathcal{B}'_1,\ldots,\mathcal{B}'_{d+1}$ は互いに直交する．Φ の直交補空間の次元は d^2-1 であるので，$\mathcal{B}'_1\cup\ldots\cup\mathcal{B}'_{d+1}$ は Φ の直交補空間を生成する．したがって，合成系 $\mathbb{C}^d\otimes\mathbb{C}^d$ 上の任意のベクトルは $\sum_{j=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{d}a_{i,j}u_{i,j}\otimes\overline{u_{i,j}}$． と表せる．

$$\left\|\sum_{j,i}a_{i,j}u_{i,j}\otimes\overline{u_{i,j}}\right\|^2=\frac{1}{d}\left|\sum_{j,i}a_{i,j}\right|^2-\frac{1}{d}\sum_j\left|\sum_i a_{i,j}\right|^2+\sum_{j,i}|a_{i,j}|^2$$

$$\left|\left\langle\phi^0_{A,B}\middle|\sum_{j,i}a_{i,j}u_{i,j}\otimes\overline{u_{i,j}}\right\rangle\right|^2=\frac{1}{d}\left|\sum_{j,i}a_{i,j}\right|^2$$

となるから，

$$\begin{aligned}
&\left\langle\sum_{j,i}a_{i,j}u_{i,j}\otimes\overline{u_{i,j}}\middle|\left(\sum_{l,k}\frac{1}{d+1}|u_{k,l}\otimes\overline{u_{k,l}}\rangle\langle u_{k,l}\otimes\overline{u_{k,l}}|\right)\middle|\sum_{j',i'}a_{i',j'}u_{i',j'}\otimes\overline{u_{i',j'}}\right\rangle\\
&=\frac{1}{d+1}\sum_{l,k}\left|\sum_{j,i}\langle u_{k,l}\otimes\overline{u_{k,l}}||a_{i,j}u_{i,j}\otimes\overline{u_{i,j}}\rangle\right|^2\\
&=\frac{1}{d}\left|\sum_{j,i}a_{i,j}\right|^2-\frac{1}{d(d+1)}\sum_j\left|\sum_i a_{i,j}\right|^2+\frac{1}{d+1}\sum_{j,i}|a_{i,j}|^2\\
&=\left\langle\sum_{j,i}a_{i,j}u_{i,j}\otimes\overline{u_{i,j}}\middle|\frac{d}{d+1}|\Phi\rangle\langle\Phi|+\frac{1}{d+1}I\middle|\sum_{j',i'}a_{i',j'}u_{i',j'}\otimes\overline{u_{i',j'}}\right\rangle
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\sum_{l,k}\frac{1}{d+1}|u_{k,l}\otimes\overline{u_{k,l}}\rangle\langle u_{k,l}\otimes\overline{u_{k,l}}|=\frac{d}{d+1}|\Phi\rangle\langle\Phi|+\frac{1}{d+1}I$ となり，$B_1\cup\cdots\cup B_{d+1}$ は $(1,1)$-design となる．さらに，定理 4.5.7 より，

$B_1 \cup \cdots \cup B_{d+1}$ は $(2,0)$-design となる．□

次に，d^2 個のベクトル $\{|s_j\rangle\}_{j=0}^{d^2-1}$ で対称性: $|\langle s_l|s_j\rangle| = \frac{1}{d+1}$ を満たすものに注目しよう．ただし，$j \neq l$ とする．このようなベクトルは symmetric informationally complete (**SIC**) ベクトルとよばれ，以下の性質を満たす．

定理 7.4.3　SIC ベクトル $\{|s_j\rangle\}_{j=0}^{d^2-1}$ は POVM: $\frac{1}{d}\sum_{j=0}^{d^2-1}|s_j\rangle\langle s_j| = I$ を与え，$(1,1)$-design となり，$(2,0)$-design となる．

SIC ベクトルに関しては，文献 [1, 45, 46] が基礎的である．なお，SIC ベクトルの組は $d = 2, \ldots, 16$ までの全ての整数と，$19, 24, 28, 31, 35, 37, 43, 48$ について解析的に与えられている [54]．また，$d \leq 67$ の場合には，数値計算により近似的に与えられている [51, 53, 54]．また，数学的には SIC POVM は Lie 環 [48] や, Galois 体 [47] と関連しており大変興味深い．また，SIC POVM を用いたより大きな t についての $(t,0)$-design は [53, 33, 5, 49, 54, 52, 50] などで考察されている．

証明.　初めに，$\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ のベクトル $s_1 \otimes \overline{s_1}, \ldots, s_{d^2} \otimes \overline{s_{d^2}}$ が一次独立であることを示す．そのために，$\sum_i a_i s_i \otimes \overline{s_i} = 0$ を満たす複素数 $a_1, \ldots, a_{d^2}$ を選ぶ．内積を考えることにより，

$$0 = \sqrt{d}\left\langle \Phi \middle| \sum_i a_i s_i \otimes \overline{s_i} \right\rangle = a_1 + \sum_{i \neq 1} a_i$$

$$0 = \left\langle u_1 \otimes \overline{u_1} \middle| \sum_i a_i u_i \otimes \overline{u_i} \right\rangle = a_1 + \frac{1}{d+1}\sum_{i \neq 1} a_i$$

を得る．この2つの式から，$a_1 = 0$ を得る．同様にして，$a_i = 0$ となり，$s_1 \otimes \overline{s_1}, \ldots, s_{d^2} \otimes \overline{s_{d^2}}$ は一次独立となる．合成系 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ の次元は d^2 であるので，$\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ の任意のベクトルは $\sum_j a_i u_i \otimes \overline{u_i}$ と書ける．

$$\left\| \sum_j a_j s_j \otimes \overline{s_j} \right\|^2 = \frac{1}{d+1}\left| \sum_k a_k \right|^2 + \frac{d}{d+1}\sum_k |a_k|^2$$

$$\left| \left\langle \phi^0_{A,B} \middle| \sum_j a_j s_j \otimes \overline{s_j} \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{d}\left| \sum_j a_j \right|^2$$

となるので,

$$\left\langle \sum_i a_i s_i \otimes \overline{s_i} \middle| \left(\sum_k \frac{1}{d} \middle| s_k \otimes \overline{s_k} \right\rangle \left\langle s_k \otimes \overline{s_k} \middle| \right) \middle| \sum_j a_j s_j \otimes \overline{s_j} \right\rangle$$

$$= \frac{d+2}{(d+1)^2} \left| \sum_k a_k \right|^2 + \frac{d}{(d+1)^2} \sum_k \left| a_k \right|^2$$

$$= \left\langle \sum_i a_i u_i \otimes \overline{s_i} \middle| \left(\frac{d}{d+1} \middle| \Phi \right\rangle \left\langle \Phi \middle| + \frac{1}{d+1} I \right) \middle| \sum_j a_j s_j \otimes \overline{s_j} \right\rangle$$

を得る．すなわち,

$$\sum_k \frac{1}{d} |s_k \otimes \overline{s_k}\rangle\langle s_k \otimes \overline{s_k}| = \frac{d}{d+1} |\Phi\rangle\langle\Phi| + \frac{1}{d+1} I \tag{7.42}$$

となり，$\{|s_j\rangle\}_{j=0}^{d^2-1}$ は (1,1)-design となる．さらに，定理4.5.7より，$\{|s_j\rangle\}_{j=0}^{d^2-1}$ は (2,0)-design となる．(7.42) において部分トレースをとると，$\sum_k \frac{1}{d}|s_k\rangle\langle s_k| = I$ となり，$\mathbb{C}^d$ 上の POVM が得られる． □

演習問題略解

演習問題 1

部分集合 $\{g \in G \mid T(g)\theta_0 = \theta_0\}$ が単位元を含むことは自明．$g_1, g_2 \in \{g \in G \mid T(g)\theta_0 = \theta_0\}$ のとき，$T(g_1g_2)\theta_0 = T(g_1)T(g_2)\theta_0 T(g_1)\theta_0 = \theta_0$ となる．したがって，$\{g \in G \mid T(g)\theta_0 = \theta_0\}$ は部分群である．

演習問題 2

初めに Θ の 1 点 θ_0 を固定する．そして，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，$g_\theta \cdot \theta_0 = \theta$ となる $g_\theta \in G$ を選ぶ．すると，$\theta \mapsto [g_\theta] \in G/H$ は等質空間としての同型写像を与える．

演習問題 3

交換子群 $[G, G]$ の生成元の集合 $\{g^{-1}h^{-1}gh \mid g, h \in G\}$ を X とおく．$z \in G$ と $x, y \in G$ に対して，$z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1})(zxz^{-1})^{-1}(zyz^{-1})^{-1} \in X$ を得る．すなわち，$zXz^{-1} \subset X$．X は $[G, G]$ の生成元であるから，$z[G, G]z^{-1} \subset [G, G]$ を得る．特に，z が $[G, G]$ の要素である場合を考えると，$[G, G]$ が正規部分群であることが確認できる．

演習問題 4

$hk = (h, e)(e, k) = (h, k)$．$khk^{-1} = (e, k)(h, e)(e, k^{-1}) = (e, k)(h, k^{-1}) = (T(k)h, kk^{-1}) = (T(k)h, e) = T(k)(h)$．

演習問題 5

$(h,k)(h',e)(h,k)^{-1} = (h,k)(h',e)(h^{-1},k^{-1}) = (h,k)(h'h^{-1},k^{-1}) = (h,T(k)h'h^{-1},kk^{-1}) = (h,T(k)h'h^{-1},e) \in H$ となることから確認できる．

演習問題 6

(2.7), (2.8) より，$((h,k)(h',k'))(h'',k'') = (h,k)((h',k')(h'',k''))$ が示せるため $H \cdot K$ は群となる．

演習問題 7

$T(k)$ が恒等写像であるとき，2.2.2 項の議論より，中心拡大が与えられる．逆に，得られた拡大が中心拡大である場合を考える．因子団を適切に取り替えることで，正規化因子団の場合に帰着できるので，正規化因子団の場合を扱う．$(h',e) = (e,k)(h',e)(e,k)^{-1} = (e,k)(h',k^{-1}) = (T(k)h'\phi(k,k^{-}),kk^{-1}) = (T(k)h'\phi(k,k^{-}),e)$ $h'=e$ の場合を考えることにより，$\phi(k,k^{-})=e$ を得る．したがって，$T(k)h'=h'$ となり，$T(k)$ は恒等写像である．

演習問題 8

同時対角化可能であることに注目すると示すことができる．

演習問題 9

f_λ が自己共役表現のとき，$\overline{\mathsf{f}_\lambda(g)} = \mathsf{f}_{\lambda^*}(g) = \mathsf{f}_\lambda(g)$ となり，その指標は実数となる．

演習問題 10

複素化可能であるために必要十分条件は虚数 i 倍と群の作用が交換可能であることであり，これは (2.31) と同値である．

演習問題 11

G_i の微分可能な 1 次元部分集合 $g_i(t)$ を考えると $G_1 \times G_2$ の要素として，$g_1(t)$, $g_2(t)$, は交換可能である．この事実から $\mathfrak{g}(G_1) \oplus \mathfrak{g}(G_2) = \mathfrak{g}(G_1 \times G_2)$ が確認できる．

演習問題 12

(3.20) と (3.21) の両辺について t^2 の項まで展開すれば確認できる．

演習問題 13

(3.41) が Jacobi 律を満たすことを示せば十分である.

$$
\begin{aligned}
&[(X_1, X_2), [(Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2)]] + [(Y_1, Y_2), [(Z_1, Z_2), (X_1, X_2)]] \\
&= [(X_1, X_2), (T(Y_2)Z_1 - T(Z_2)Y_1 + [Y_1, Z_1], [Y_2, Z_2])] \\
&\quad + [(Y_1, Y_2), (T(Z_2)X_1 - T(X_2)Z_1 + [Z_1, X_1], [Z_2, X_2])] \\
&= (T(X_2)(T(Y_2)Z_1 - T(Z_2)Y_1 + [Y_1, Z_1]) - T([Y_2, Z_2])X_1 \\
&\quad + [X_1, (T(Y_2)Z_1 - T(Z_2)Y_1 + [Y_1, Z_1]], [X_2, [Y_2, Z_2]]) \\
&\quad + (T(Y_2)(T(Z_2)X_1 - T(X_2)Z_1 + [Z_1, X_1]) - T([Z_2, X_2])Y_1 \\
&\quad + [Y_1, (T(Z_2)X_1 - T(X_2)Z_1 + [Z_1, X_1]], [Y_2, [Z_2, X_2]]) \\
&= (T(X_2)(T(Y_2)Z_1 - T(Z_2)Y_1 + [Y_1, Z_1]) - T([Y_2, Z_2])X_1 \\
&\quad + T(Y_2)(T(Z_2)X_1 - T(X_2)Z_1 + [Z_1, X_1]) - T([Z_2, X_2])Y_1 \\
&\quad + [X_1, (T(Y_2)Z_1 - T(Z_2)Y_1 + [Y_1, Z_1]] \\
&\quad + [Y_1, (T(Z_2)X_1 - T(X_2)Z_1 + [Z_1, X_1]], \\
&\quad [X_2, [Y_2, Z_2]] + [Y_2, [Z_2, X_2]]) \\
&= ([T(X_2), T(Y_2)]Z_1 + T(Z_2)T(Y_2)X_1 - T(Z_2)T(X_2)Y_1 \\
&\quad + T(Z_2)[X_1, Y_1] + [Z_1, (T(X_2)Y_1 - T(Y_2)X_1] + [Z_1, [X_1, Y_1]], \\
&\quad [Z_2, [X_2, Y_2]]) \\
&= [(Z_1, Z_2), (T(X_2)Y_1 - T(Y_2)X_1 + [X_1, Y_1], [X_2, Y_2])] \\
&= [(Z_1, Z_2), [(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)]]
\end{aligned}
$$

演習問題 14

$$[\mathsf{f}((X_1, X_2)), \mathsf{f}((Y_1, Y_2))]$$
$$= (\mathsf{f}_1(X_1) + \mathsf{f}_2(Y_1))(\mathsf{f}_1(X_2) + \mathsf{f}_2(Y_2)) - (\mathsf{f}_1(X_2) + \mathsf{f}_2(Y_2))(\mathsf{f}_1(X_1) + \mathsf{f}_2(Y_1))$$
$$= [\mathsf{f}_1(X_1), \mathsf{f}_1(Y_1)] + [\mathsf{f}_2(X_2), \mathsf{f}_2(Y_2)] + [\mathsf{f}_1(X_1), \mathsf{f}_2(Y_2)] + [\mathsf{f}_2(X_2), \mathsf{f}_1(Y_1)]$$
$$= \mathsf{f}_1([X_1, Y_1]) + \mathsf{f}_2([X_2, Y_2]) - \mathsf{f}_1(T(Y_2)X_1) + \mathsf{f}_1(T(X_2)Y_1)$$
$$= \mathsf{f}([(X_1, X_2), (Y_2, Y_2)])$$

演習問題 15

性質 (3.44) より，以下の事実を示すことができる．$\mathsf{ad}(Y)$ は Killing form についての計量が非負の要素は計量が非負の要素に移し，計量が非正の要素は計量が非正の要素に移す．したがって，適当な基底を選び対角化すると，$\mathsf{ad}(Y)$ は Killing form についての計量が正の部分と負の部分に分かれる．すると，後はそれぞれの部分について，正規直交基底を選ぶと，$\mathsf{ad}(Y)$ は交代行列として表現できる．そのため，$\exp(\mathsf{ad}(Y))$ は直交行列となり，$(\mathsf{ad}(g)X, \mathsf{ad}(g)Z)_{\mathfrak{g}} = (X, Z)_{\mathfrak{g}}$ を得る．

演習問題 16

$X \in \mathfrak{h}$ は

$$(X, [F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}])_{\mathfrak{g}} = ([X, F^x_{\boldsymbol{\alpha}}], F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = (-\boldsymbol{\alpha}(X)F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} = -(X, Z_{\boldsymbol{\alpha}})(F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}}$$

を満たし，Killing form は非退化であるので，$[F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}] = -(F^y_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} Z_{\boldsymbol{\alpha}}$ を得る．同様にして $[F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^y_{\boldsymbol{\alpha}}] = -(F^x_{\boldsymbol{\alpha}}, F^x_{\boldsymbol{\alpha}})_{\mathfrak{g}} Z_{\boldsymbol{\alpha}}$ を得る．

演習問題 17

仮定より, $\langle \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j \rangle = 0$ となる．このとき, $\langle \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j \rangle = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)}{(\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j)} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)}{(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) + (\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j)} < 1$ となり，この値が整数とならないので，$\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j$ は Φ に含まれない．

演習問題 18

$\alpha = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{x'+iy'}{\sqrt{2}} = \zeta\sqrt{1-\eta} + \alpha\sqrt{\eta}$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_2\, \mathsf{U}(b_\eta)|\zeta\rangle\langle\zeta| \otimes \rho_{N/\eta}\mathsf{U}(b_\eta)^\dagger \\
&\quad = \int_{\mathbb{C}} |\zeta\sqrt{1-\eta} + \alpha\sqrt{\eta}\rangle\langle\zeta\sqrt{1-\eta} + \alpha\sqrt{\eta}| e^{-\frac{|\alpha|^2\eta}{N}} \eta \frac{dxdy}{2\pi N} \\
&\quad = \int_{\mathbb{C}} |\beta\rangle\langle\beta| e^{-\frac{|\beta-\zeta\sqrt{1-\eta}|^2}{N}} \frac{dx'dy'}{2\pi N} \to \Lambda_N(|\zeta\rangle\langle\zeta|)
\end{aligned}$$

となる．

参考文献

[1] Appleby, D. M., "SIC-POVMs and the extended Clifford Group," *J. Math. Phys.* **46**, 052107, 2005. Also available as quant-ph/0412001.

[2] Artin, E., *Geometric algebra*, Interscience Publishers, 1957.

[3] 浅野啓三，永尾汎，『群論』，岩波書店，1965.

[4] Baik, J., Deift, P. and Johansson, K., *J. Amer. Math. Soc.*, **12**(4), 1119–1178, 1999. G/A *Geom. Funct. Anal.*, **10**(4), 702, 2000.

[5] Bannai, E. and Hoggar, S. G., "On tight t-designs in compact symmetric spaces of rank one," *Proc. Japan Acad.*, **61A**, 78, 1985.

[6] Führ, H., *Abstract harmonic analysis of continuous wavelet transforms*, Lecture Notes in Mathematics **1863**, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[7] Folland, G. B., *A course in abstract harmonic analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[8] Goodman, R. and Wallach, N. R., *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **68**, Cambridge University Press, 1999.

[9] Grassl, M., Rotteler, M. and Beth, T., "Efficient Quantum Circuits for Non-Qubit Quantum Error-Correcting Codes," *Int. J. Found. Comput. Sci. (IJFCS)*, **14**(5), 757–775, 2003.

[10] Harish-Chandra,"Representation of Semisimple Lie group VI," *Amer. Jour. Math.*, **78**(3), 564–628, 1956.

[11] Hayashi, A., Hashimoto, T. and Horibe, M., "Reexamination of optimal quantum state estimation of pure states," *Phys. Rev. A*, **72**, 032325, 2005.

[12] 林正人，『量子情報理論入門』，SGC ライブラリ **32**，サイエンス社，2004.

[13] Hayashi, M. and Sakaguchi, F., "Subnormal operators regarded as generalized observables and compound-system-type normal extension related to su(1,1)," *J. Phys. A: Math. and Gen.*, **33**, 7793–7820, 2000.

[14] Hoggar, S. G., "Parameters of t-designs in $\mathbf{F}\,P^{d-1}$," *Eur. J. Comb.*, **5**, 29–36, 1984.

[15] Holevo, A. S., *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982; Originally published in Russian, 1980; 2nd Edition, Springer, 2012.

[16] Howe, R. and Tan, E. C., *Non-Abelian Harmonic Analysis: Applications of SL(2,R)*, Springer-Verlag, 1992.

[17] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics **9**, Springer-Verlag, 1972.

[18] Knapp, A. W., *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in mathematics **140**, Birkhauser, 2002.

[19] Knapp, A. W., *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*, Princeton Mathematics Series **36**, Princeton University Press, 1986.

[20] 小林俊行，大島利雄，『リー群と表現論』，岩波書店，2005.

[21] Levenshtein, V., "On designs in compact metric spaces and a universal bound on their size," *Discrete Mathematics*, **192**(1–3), 251–271, 1998.

[22] Levenshtein, V., "Designs as maximum codes in polynomial metric spaces," *Acta Appl. Math.*, **29**(1), 1992.

[23] MacDonald, I. G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, 1979.

[24] Messiah, A., *Quantum Mechanics (Volume II)*, North Holland Publishing, New York, 1981.

[25] 永尾汎，『群論』，岩波全書 **261**，岩波書店，1965.

[26] Neeb, K. H., *Holomorphy and Convexity in Lie Theory*, De Gruyter Expositions in Mathematics **28**, Walter de Gruyter, 1999.

[27] Neuhauser, M., "An explicit construction of the metaplectic representation over a finite field," *J. Lie Theory*, **12**(15), 2002.

[28] Neuhauser, M., "Explicit construction of the metaplectic representation for finite cyclic groups," preprint: `http://www.matha.rwth-aachen.de/ ~markus/`

[29] Perelomov, A., *Generalized Coherent States and Their Applications*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1986.

[30] Petz, D., *An Invitation to the Algebra of Canonical Commutation Relations*, Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics **2**, 1990.

[31] Razumov, A. V. and Saveliev, M. V., *Lie Algebras, Geometry, and Toda-type*

Systems, Cambridge Lecture Notes in Physics, Cambridge University Press, 1997.

[32] 佐藤光,『物理数学特論　群と物理』, パリティ物理学コース, 丸善出版, 1992.

[33] Scott, A. J., "Tight informationally complete quantum measurements," *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 13507, 2006.

[34] 竹内外史,『リー代数と素粒子論』, 裳華房, 1983.

[35] Tracy, C. A. and Widom, H., *Comm. Math. Phys.*, **159**, 151, 1994.

[36] Weyl, H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1928. English translation, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, of the second ed. (1931) was reprinted by Dover, 1950.

[37] Wootters, W. K. and Fields, B. D., "Optimal state determination by mutually unbiased measurements," *Ann. Phys.*, (N.Y.) **191**, 363–381, 1989.

[38] Rockafellar, R. T., *Convex analysis*, Princeton University Press, 1997.

[39] Walls, D. F. and Milburn, G. J., *Quantum optics*, Springer, 2008.

[40] Hardy, G. H. and Ramanujan, S., "Asymptotic formulae in combinatory analysis," *Proceedings of the London Mathematical Society*, **17**, 75–115, 1918.

[41] Rademacher, H., "On the partition function p(n)," *Proceedings of the London Mathematical Society*, **43**, 241–254, 1938.

[42] Chandrasekharan, K., *Arithmetical Functions*, Springer, 1970.

[43] Prasad, A. V. M. and Padmavathamma, "The Hardy-Ramanujan-Rademacher expansion for $C\phi_{m,m'}(n)$ using ford circles," *Indian J. pure appl. Math.*, **22**(11), 913–925, 1991.

[44] Kirillov, A. A., *Elements of the theory of representations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **220**, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1976.

[45] Zauner, G., *Quantendesigns—Grundzuge einer nicht kommutativen Designtheorie*, PhD thesis, University of Vienna, 1999.

[46] Renes, J. M., Blume-Kohout, R., Scott, A. J. and Caves, C. M., *J. Math. Phys.*, **45**, 2171, 2004.

[47] Appleby, D. M., Yadsan-Appleby, H. and Zauner, G., "Galois Automorphisms of a Symmetric Measurement," quant-ph/1209.1813, 2012.

[48] Appleby, D. M., Flammia, S. T. and Fuchs, C. A., "The Lie algebraic significance of symmetric informationally completemeasurements," *J. Math. Phys.*, **52**, 022202, 2011.

[49] Bannai, E. and Hoggar, S. G., "Tight t-designs and squarefree integers," *Eur. J. Comb.*, **10**, 113, 1989.

[50] Chen, L., "Length of separable states and symmetrical informationally complete (SIC) POVM," arXiv:1302.0667, 2013.

[51] Fuchs, C. A. and Schack, R., "Quantum-Bayesian Coherence: The No-Nonsense Version," quant-ph/1301.3274, 2013.

[52] Hoggar, S. G., "t-designs in projective spaces," *Eur. J. Comb.*, **3**, 233, 1982.

[53] Hardin, R. H. and Sloane, N. J. A., "McLaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions," *Discrete Comput. Geom.*, **15**, 429, 1996.

[54] Scott, A. J. and Grassl, M., "SIC-POVMs: A new computer study," *J. Math. Phys.*, **51**, 042203, 2010.

索　引

【サ行】

【マ行】

【ヤ行】

【ラ行】

【ワ行】

〈著者紹介〉

林　正人（はやし　まさひと）

1994年　京都大学理学部 卒業

1999年　京都大学大学院理学研究科博士後期課程（数学・数理解析専攻）修了
日本学術振興会特別研究員，理化学研究所脳科学総合研究センター研究員，科学技術振興機構 ERATO 今井量子計算機構プロジェクト技術参事，同 ERATO-SORST 量子情報システムアーキテクチャーグループリーダー，東北大学大学院情報科学研究科准教授を経て

現　在　名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授
博士（理学）

専　門　量子情報理論，量子暗号，情報理論

著　書　『量子情報理論入門』（サイエンス社，2004）
Asymptotic Theory Of Quantum Statistical Inference: Selected Papers（編著，World Scientific Publishing，2005）
『量子情報科学入門』（共著，共立出版，2012）
『量子情報への表現論的アプローチ』（共立出版，2014）

量子論のための表現論

Group Representation for Quantum Theory

2014年 1 月25日　初版 1 刷発行

著　者　林　正人　© 2014

発行者　南條光章

発行所　**共立出版株式会社**
〒 112-8700
東京都文京区小日向 4-6-19
電話　03-3947-2511（代表）
振替口座　00110-2-57035
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂

製　本　中條製本

一般社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止

NDC 411.62,421.3

ISBN 978-4-320-11078-6

Printed in Japan